



# بررسی استهلاک انرژی در سرریز پلکانی با استفاده از مدل عددی FLUENT

پیمان ورجاوند<sup>۱</sup>، پیام خسروی نیا<sup>۲</sup>، فرزین سلماسی

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

۳- استادیار گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

[pavamsh1998@yahoo.com](mailto:pavamsh1998@yahoo.com)

## خلاصه

سرریز پلکانی متشکل از پله‌هایی است که از نزدیکی تاج سرریز شروع شده و تا پاشنه پایین دست ادامه دارند. توجه به این نوع سرریزها به دلیل تاثیر قابل ملاحظه پلکان‌ها بر میزان استهلاک انرژی جریان، بیشتر شده است. استهلاک انرژی در سرریز پلکانی در طول سرریز بر اثر برخورد جریان آب با پلکان‌ها (زبری‌های بزرگ) انجام می‌شود. بنابراین انرژی کمتری در انتهای سرریز باید مستهلک شود و در نتیجه، سازه مستهلک کننده انرژی با ابعاد کوچکتری مورد نیاز است. در این مقاله سرریز پلکانی با استفاده از مدل فلونت<sup>۳</sup> شبیه سازی شده و برای مدل سازی آشفتگی جریان از مدل آشفتگی  $k-\epsilon$  استاندارد استفاده گردید. برای این کار استهلاک انرژی از روی سرریزهای پلکانی به ازای تعداد پله‌های مختلف ارزیابی شد. بوسیله روش عددی سرعت و عمق جریان در پایین دست سرریز بدست آمده و در ادامه انرژی مستهلک شده در طول سرریز محاسبه گردید. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که به ازای انرژی ثابت بالادست، افزایش تعداد پلکان‌ها به میزان قابل توجهی باعث افزایش استهلاک انرژی می‌گردد. همچنین نتایج آنالیزهای عددی به صورت منحنی‌های هم فشار و سرعت ارائه شده، که با نتایج بدست آمده از منحنی‌های هم فشار می‌توان نقاط حساس به کاویتاسیون را شناسایی نمود.

کلمات کلیدی: سرریز پلکانی، مدل Fluent، مدل آشفتگی  $k-\epsilon$ ، مدل VOF

## مقدمه

سرریز پلکانی از جمله سازه‌هایی است که در بازه‌ای از رودخانه که شیب تند دارند، به منظور استهلاک انرژی و کاهش فرسایش آب به کار می‌رود. استفاده از سرریز پلکانی ضمن اینکه موجب کاهش سرعت و افت انرژی بیشتر جریان از طریق ایجاد تلاطم در طول سازه می‌گردد، باعث افزایش قدرت خود پالایی رودخانه بواسطه هوادهی مناسب در ناحیه پلکانهای سرریز نیز می‌شود. میزان افت انرژی قابل توجه باعث می‌گردد تا عمق حفاری حوضچه آرامش پایین دست، طول حوضچه آرامش و ارتفاع دیواره‌های جانبی آن کاهش یافته و از این نظر صرفه جویی اقتصادی زیادی در اجرای سد ایجاد گردد. کاسیدی (۱۹۶۵) از اولین محققانی بود که از معادله لاپلاس و حل آن به روش تفاضلات محدود برای آنالیز جریان بر روی سرریزهای اوجی شکل از استفاده کرد. او با استفاده از تئوری جریان پتانسیل توانست سطح آزاد آب و فشار تاج سرریز را تحلیل کند که نتایج ایشان تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی نشان داد [۱]. سورنسن (۱۹۸۵) و چانسون (۲۰۰۱) مطالعات آزمایشگاهی زیادی پیرامون تشخیص جریان و پراکنش انرژی بر روی سرریزهای پلکانی انجام دادند و روابطی را برای تعیین نوع جریان و میزان انرژی تلف شده بر روی این نوع سرریزها ارائه دادند [۲] و [۳]. اولسن و جلسونگ (۱۹۹۸) جریان بر روی سرریزهای اوجی را در حالت دو بعدی و سه بعدی به ازاء پارامترهای هندسی توسط روشهای عددی مدل کردند و معادلات ناویر-استوکس را با استفاده از مدل آشفتگی  $k-\epsilon$  حل نمودند و ضریب دبی را برای سرریز اوجی بدست آوردند [۴]. چن و همکاران (۲۰۰۲) با استفاده از روش حجم محدود جریان بر روی سرریزهای پلکانی را آنالیز کرده و برای تعیین آشفتگی جریان از مدل  $k-\epsilon$  استفاده نمودند [۵]. تابارا و همکاران (۲۰۰۵) سرریز پلکانی را با استفاده از روش اجزاء محدود آنالیز نموده و از مدل  $k-\epsilon$  استاندارد به منظور تعیین آشفتگی جریان استفاده کردند [۶]. نادری‌راد و همکاران (۱۳۸۶) استهلاک انرژی را در سرریز پلکانی و سرریز اوجی بوسیله روش حجم سیال<sup>۴</sup> مقایسه کرده و نشان دادند که

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی گروه مهندسی آب

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی گروه مهندسی آب

<sup>۳</sup> Fluent

<sup>۴</sup> VOF



نسبت استهلاک انرژی به انرژی اولیه در سرریز پلکانی به میزان  $80/9$  درصد نسبت به سرریز اوجی افزایش داشته است [۷]. اسپالدینگ و لاندن (۱۹۷۲) از اولین کسانی بودند که مدل  $k-\epsilon$  را ارائه کردند [۸]. دو معادله مدل آشفتگی  $k-\epsilon$  روش شبیه‌سازی عددی مؤثری است که در دهه های اخیر استفاده شد. در این پژوهش هدف تهیه مدل ریاضی برای آنالیز جریان از روی سرریز پلکانی است. برای این منظور از مدل عددی فلونتت که مبنای کار آن روش حجم محدود می‌باشد استفاده گردید. برای تعیین سطح آزاد جریان روی سرریز از روش حجم سیال و برای مدل سازی آشفتگی جریان از مدل آشفتگی  $k-\epsilon$  استفاده شد. به وسیله روش عددی، سرعت و ارتفاع جریان در پایین دست سرریز بدست می‌آید و در ادامه استهلاک انرژی در طول سرریز محاسبه می‌شود. نتایج به دست آمده از آنالیز عددی با نتایج آزمایشگاهی بر روی مدل فیزیکی سرریز پلکانی مقایسه گردیده و در مورد کارایی مدل فلونتت بحث خواهد شد.

## مواد و روش‌ها

### معادلات حاکم بر جریان:

معادله پیوستگی و مومنتم در جریان سیال تراکم ناپذیر بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\rangle \right] \quad (2)$$

که در آن  $t$  زمان،  $u_i$  مولفه سرعت،  $x_i$  مولفه مختصات،  $\rho$  چگالی،  $\mu$  لزجت دینامیک،  $\mu_t$  لزجت تلاطم و  $p'$  فشار اصلاح شده می‌باشد. از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$p' = p + \frac{2\rho k}{3} \quad (3)$$

که در آن  $p$  فشار و  $k$  انرژی جنبشی اغتشاشی می‌باشد.

همچنین معادلات  $k$  و  $\epsilon$  بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left\langle \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right\rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G + \rho \epsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \epsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left\langle \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right\rangle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} G - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5)$$

که در آن  $\mu_t$  لزجت اغتشاش که بوسیله  $k$  (انرژی جنبشی اغتشاشی) و  $\epsilon$  (نرخ استهلاک انرژی اغتشاشی) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6)$$

که در آن  $C_\mu = 0.09$  ثابت آزمایشگاهی است. اعداد اغتشاش پیرانتل برای  $k$  و  $\epsilon$  بترتیب عبارتند از:  $\sigma_k = 1.0$ ،  $\sigma_\epsilon = 1.3$  و  $C_{1\epsilon} = 1.44$ ،  $C_{2\epsilon} = 1.92$

ثابت‌های معادله  $\epsilon$  می‌باشند. تولید انرژی جنبشی اغتشاش  $G$ ، در نتیجه گرادیان سرعت متوسط، بصورت زیر تعریف می‌شود: [۵]

$$G = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (7)$$

برای جریانهای کاملا توسعه یافته در این مدل معیار  $y^+$  ارائه شده است. این معیار برای در نظر گرفتن ارتفاع زبری سطح در تشکیل پروفیل سرعت می‌باشد، که در واقع معادل عدد رینولدز لایه مرزی است، که در جریانهای متلاطم باید در محدوده ۳۰ تا ۳۰۰ باشد.  $y^+$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود: [۹]

$$y^+ \equiv \frac{u_T y}{\nu} \quad (8)$$

که در آن  $\nu$  لزجت دینامیکی،  $u_T$  سرعت برشی و  $y$  فاصله از سطح می‌باشد.

**مدل حجم سیال (VOF):**

مدل حجم سیال توسط نیکول و هیرت (۱۹۸۱) پیشنهاد گردید. این مدل برای جریان دو یا چند سیال بدون اختلاط با یکدیگر در شرایطی که تعیین سطح مشترک بین دو سیال مطلوب است مناسب می باشد. مدل حجم سیال بر اساس تئوری جریان چند فازی پیشنهاد گردیده است. اما در واقع یک مدل چند سیاله نیست و تنها یک سیال ساده به عنوان سیال اصلی به مدل حجم سیال معرفی می گردد. بنابراین برای جریان سیالات به صورت آب و گاز تنها یک سری از معادلات مومنتوم به صورت مشترک بین گاز و آب حل گردیده و کسر از حجم هر کدام از سیالات که سلولهای محاسباتی را اشغال می نمایند، تعیین می گردد. در هر سلول مجموع کسرهای حجمی آب و هوا برابر ۱ می باشد. بنابراین یک متغیر اضافه به نام کسر حجمی آب یا هوا به شرایط مسئله معرفی می گردد. اگر  $\alpha_w$  کسر حجمی آب را نشان دهد، بنابراین کسر حجمی هوا یا  $\alpha_a$  توسط رابطه زیر بیان می گردد:

$$\alpha_a = 1 - \alpha_w \quad (9)$$

از آنجایی که کسر حجمی آب و هوا در هر نقطه معلوم می باشد، بنابراین مقادیر متغیرها و خصوصیات سیال بین آب و هوا به اشتراک گذاشته می شود و در واقع مقادیر متوسط حجمی را نشان می دهد. بنابراین مقادیر متغیرها و خصوصیات سیال در هر سلول داده شده، به عبارتی شاخصی از آب، هوا و یا مخلوطی از آن دو می باشد، که هر کدام از حالات بستگی به کسر حجمی مربوط دارد. تعیین سطح مشترک بین آب و هوا از طریق حل معادله پیوستگی به فرم زیر انجام می شود، این معادله برای جهت  $x$  آورده شده است:

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + u_i \frac{\partial \alpha_w}{\partial x_i} = 0 \quad (10)$$

مقدار  $\alpha_w$  در یک سلول بیانگر کسر حجمی سلول که توسط آب اشغال شده است می باشد. برای مثال مقدار یک برای  $\alpha_w$  نشانگر سلولی پر از آب می باشد در حالی که  $\alpha_w = 0$  نشاندهنده سلولی پر از هوا می باشد اگر مقدار  $\alpha_w$  بین ۰ و ۱ باشد، بنابراین حتما می بایست یک مرز مشترک بین هوا و آب در سلول مربوطه وجود داشته باشد. بنابراین اطلاعات دقیق در مورد سطح مشترک با توجه به مقدار  $\alpha_w$  به دست می آید [۵]. شمای بازسازی هندسی<sup>۱</sup> به منظور تعیین محل دقیق سطح آزاد آب استفاده می شود. این شما از روش *pic wise linear* برای نشان دادن سطح مشترک دو سیال استفاده می کند که این سطح مشترک، سطح جداسازی آب و هوا است. از شکل خطی برای محاسبه انتقال سیال از میان وجوه سلول استفاده می شود. در هر نقطه از پروفیل سطح آب که حجم سیال ۰/۵ باشد به عنوان سطح آب در نظر گرفته می شود [۹]. اساس اطلاعات کسر حجمی و مقادیر مشتقات در داخل سلول محل سطح مشترک خطی نسبت به مرکز هر سلول قابل محاسبه می باشد. معادلات مدل  $k - \mathcal{E}$  به همراه روش حجم سیال معادل روابط ۴، ۵، ۷ و ۸ مربوط به مدل  $k - \mathcal{E}$  برای حالت یک فاز می باشد به جز عبارات مربوط به چگالی ( $\rho$ ) و لزجت مولکولی ( $\mu$ ) که خصوصیات مربوط به کسر حجمی متوسط بوده می باشد. این مقادیر تابعی از کسر حجمی بوده و مقادیر آنها ثابت نمی باشد. در شرایط وجود آب و هوا در یک سلول مقادیر آنها از روابط زیر بدست می آید:

$$\rho = \alpha_w \rho_w + (1 - \alpha_w) \rho_a \quad (11)$$

$$\mu = \alpha_w \mu_w + (1 - \alpha_w) \mu_a \quad (12)$$

$\rho_a$  و  $\rho_w$  بترتیب چگالی هوا و آب می باشد،  $\mu_a$  و  $\mu_w$  بترتیب لزجت آب و هوا می باشد.

با استفاده از روش سعی و خطا  $\alpha_w, \mu, \rho$  محاسبه می شوند، در روابط ۱، ۲، ۴ و ۵ مدل تلاطم  $k - \mathcal{E}$ ، شش متغیر مجهول وجود دارد که عبارتند از:  $(i = 1, 2, 3) \mu_i, p, k, \mathcal{E}$ ، زمانی که معادله حجم سیال با مدل اغتشاش  $k - \mathcal{E}$  ترکیب شود، متغیر  $\alpha_w$  به مجهولات اضافه می شود. بنابراین یک معادله اضافی (رابطه ۱۰) برای تعیین هفت متغیر مجهول نیاز می باشد. در نتیجه با حل معادلات ۱، ۲، ۴ و ۵ و رابطه ۱۰ تمام هفت متغیر مجهول حل می شوند [۵].

**مشخصات هندسی و هیدرولیکی سرریز:**

در این تحقیق از مشخصات مدل فیزیکی بررسی شده در آزمایشگاه هیدرولیک دانشکده مهندسی علوم آب دانشگاه شهید چمران اهواز استفاده شد. در پروژه ذکر شده، شش مدل فیزیکی از سرریز پلکانی و یک مدل فیزیکی از سرریز اوجی ساخته شد و آزمایشها با دبیهای مختلف بر روی مدل انجام پذیرفت [۱۰]. در این تحقیق مشخصات هیدرولیکی جریان عبوری از روی سرریز پلکانی برای دو مدل و به ازاء دبی ۵۰/۸ لیتر در ثانیه مورد بررسی قرار گرفت. این دو مدل شامل ۱۵ و ۳۵ پله می باشد، که ارتفاع پله در دو مدل به ترتیب ۵/۵ و ۲/۴۶ سانتی متر بوده است. ارتفاع مدل سرریزها ثابت و برابر ۱ متر در نظر گرفته شد. شیب سرریزها ۴۵ درجه و قسمت منحنی شکل بالادست پلکانها با معادله  $Y = 1.68X^{1.85}$  طراحی شده است. مقدار انرژی در بالادست تاج سرریز،  $H_t$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$H_t = y_0 + \frac{v_a^2}{2g} \quad (13)$$

در فرمول فوق  $y_0$  برابر عمق آب بالادست سرریز،  $v_a$  نشاندهنده سرعت نزدیک شونده به سرریز و  $g$  نماینده شتاب ثقل می باشد.

<sup>1</sup> Geo reconstruction

برای محاسبه انرژی در پایین دست سرریز و قبل از پرش  $H_1$ ، از رابطه زیر استفاده گردید:

$$H_t = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} = y_1 + \frac{q^2}{2gy_1^2} \quad (14)$$

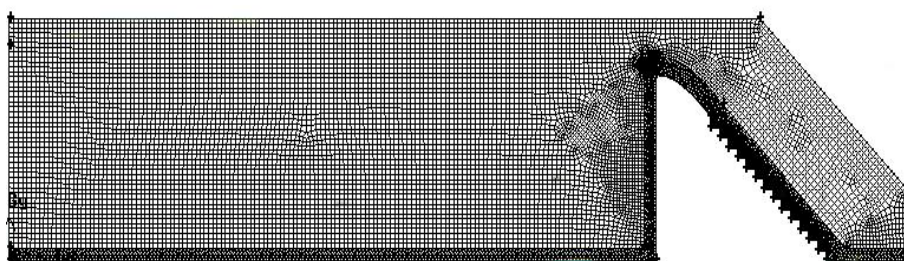
در رابطه فوق  $y_1$  عمق قبل از پرش هیدرولیکی و  $q$  دبی در واحد عرض می‌باشد.

مقدار افت انرژی نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

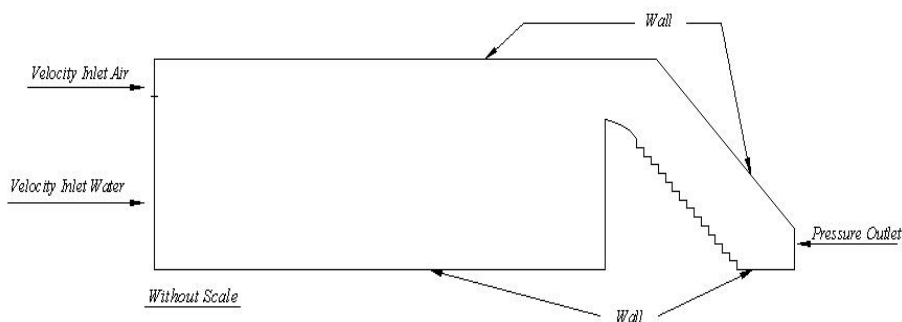
$$\frac{\Delta H}{H_t} = \frac{H_t - H_1}{H_t} \quad (15)$$

#### مشخصات مدل عددی سرریز:

مدل سرریز پلکانی مورد استفاده در این تحقیق در شکل (۱) نشان داده شده است. برای شبکه بندی این مدل از المانهای مثلثی و مثلث-مربعی به ابعاد  $0.025/0.1$  تا  $0.1/0.1$  متر استفاده شده است. طول بالادست سرریز ۴ متر و پایین دست آن  $0.75$  متر می‌باشد. این مشخصات برای دو مدل یکسان در نظر گرفته شد. شرایط مرزی اعمال شده در مدل مطابق شکل (۲) می‌باشد.



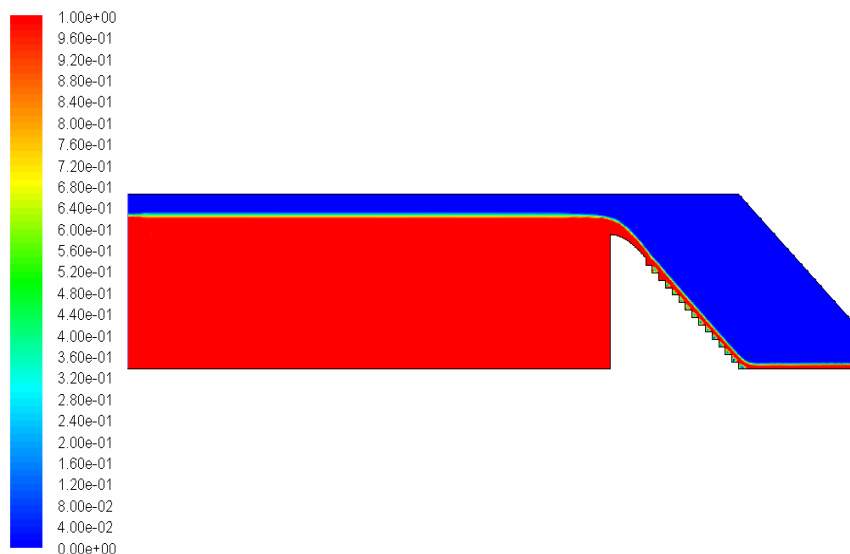
شکل ۱- نمونه شبکه بندی برای مدل ۱۵ پلکانی



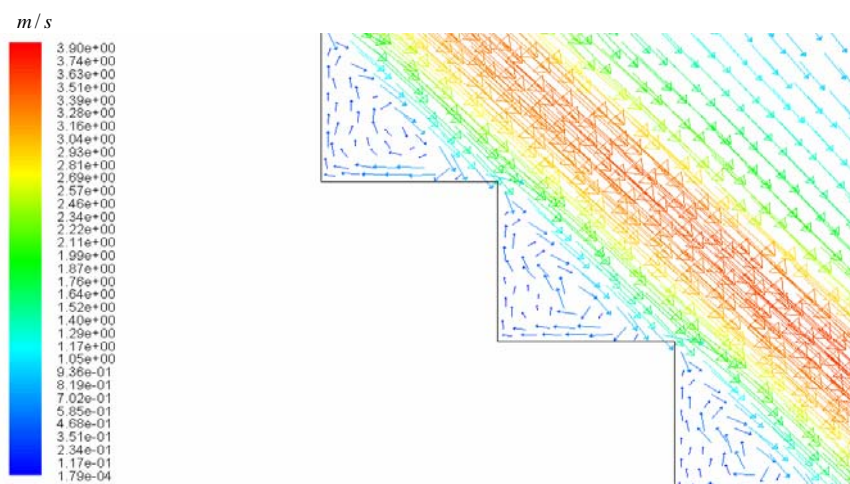
شکل ۲- شرایط مرزی بکار برده شده برای مدل ۱۵ پلکانی

#### نتایج آنالیز عددی

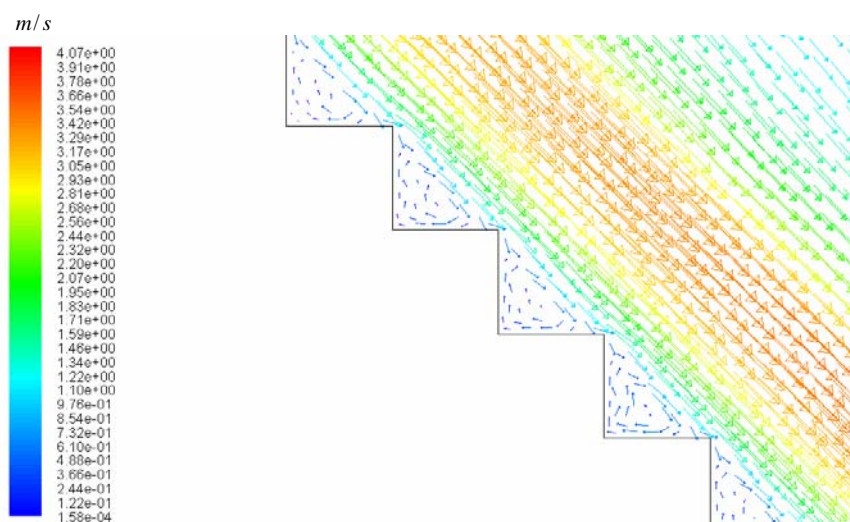
بخشی از نتایج آنالیز عددی به صورت منحنی‌های هم فشار و بردارهای سرعت برای دو مدل آورده شده است. در شکل (۳) پروفیل سطح آب برای مدل ۱۵ پلکانی نشان داده شده است. شکل (۴) بردارهای سرعت برای هر دو مدل در ارتفاع ۴۵ تا ۵۵ سانتی‌متر نسبت به کف فلوم را نشان می‌دهد. شکل (۵) منحنی‌های فشار برای دو مدل را نشان می‌دهد، که با استفاده از آن می‌توان مقادیر فشار مثبت و منفی را نشان داد و همچنین نقاط حساس به کاویتاسیون را شناسایی کرد. قابل ذکر است در ابتدا  $y^+$  در هر دو مدل بیشتر از ۳۰۰ بود که پس از تصحیح، کوچکتر کردن شبکه بندی لایه مرزی و اجرا کردن دوباره مدل مقدار آن حدود ۱۷۰ بدست آمد.



شکل ۳- پروفیل سطح آب برای مدل ۱۵ پلکانی در دبی ۵۰/۸ lit/s

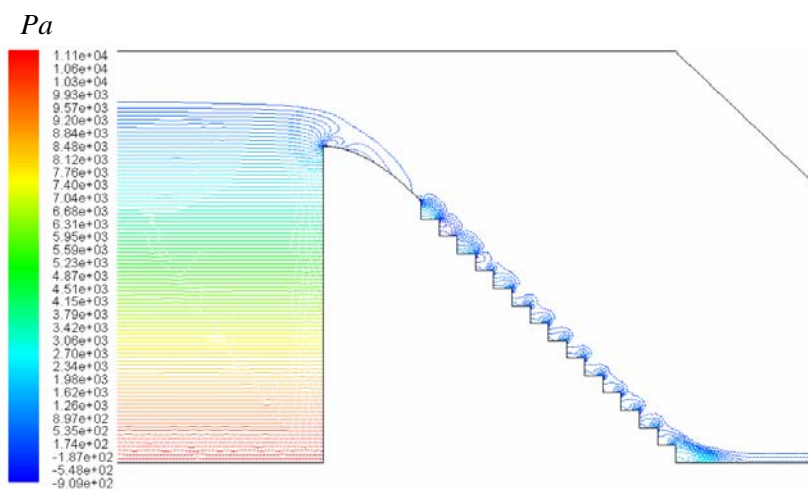


الف) مدل ۱۵ پلکانی

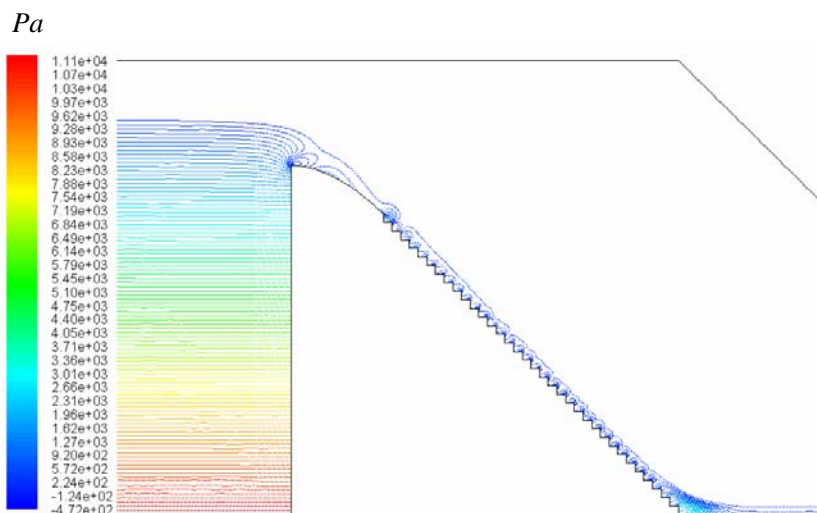


ب) مدل ۳۵ پلکانی

شکل ۴- بردارهای سرعت در ارتفاع ۴۵-۵۵ سانتیمتر نسبت به کف فومم به ازای دبی ۵۰/۸ lit/s



الف) مدل ۱۵ پلکانی



ب) مدل ۳۵ پلکانی

شکل ۵- منحنی‌های هم فشار برای دو مدل از سرریزهای پلکانی به ازای دبی  $50/8 \text{ lit/s}$

### نتیجه گیری

در این تحقیق با استفاده از مدل عددی فلونت جریان بر روی سرریز پلکانی شبیه‌سازی گردید و با مدل فیزیکی مقایسه شد. نتایج حاصله از مدل فیزیکی و عددی در جداول (۱) و (۲) آورده شده است.

جدول ۱- پارامترهای محاسبه شده در مدل فیزیکی

تعداد پلکان	$y_0, m$	$y_1, m$	$H_t, m$	$H_l, m$	$\frac{\Delta H}{H_t} (\%)$
۱۵	۱/۱۴۷۶	۰/۰۳۱	۱/۱۴۸	۰/۶۱۶	۴۶/۳۴
۳۵	۱/۱۴۷۶	۰/۰۳۶	۱/۱۴۸	۰/۴۷۰	۵۹/۰۶



جدول ۲- پارامترهای محاسبه شده در مدل عددی

تعداد پلکان	$y_0, m$	$y_1, m$	$H_1, m$	$H_2, m$	$\frac{\Delta H}{H_1} (\%)$
۱۵	۱/۱۳۹۲	۰/۰۳۰۴	۱/۱۳۹۶	۰/۶۰۱	۴۷/۲۶
۳۵	۱/۱۳۸۴	۰/۰۳۵۶	۱/۱۳۸۸	۰/۴۵۱	۶۰/۴۰

مشاهده می‌شود که خطای محاسبه افت انرژی در مدل عددی نسبت به مدل فیزیکی برای مدل ۱۵ پلکانی ۱/۹۸٪ و برای مدل ۳۵ پلکانی ۲/۲۷٪ درصد می‌باشد. طبق نتایج درصد خطای محاسبه سطح آب در مدل عددی نسبت به مدل فیزیکی بین ۰/۷۳٪ تا ۱/۹۳٪ می‌باشد، در صورتی که خطای محاسبه افت انرژی بیشتر می‌باشد، که دلیل آن وارد شدن خطای محاسبه سطح آب در روابط مربوط به محاسبه افت انرژی و بیشتر شدن خطا می‌باشد. سرعت در پنجه سرریز و حداقل فشار نتیجه شده از مدل عددی برای مدل ۱۵ پلکانی بترتیب ۳/۳۴ m/s، ۹۰۹ pa- و برای مدل ۳۵ پلکانی ۲/۸۶ pa، ۴۷۲/۵ pa- می‌باشد. در مدل فیزیکی به ازای دبی ۵۰/۸ لیتر در ثانیه برای دو نوع سرریز جریان کاملاً غیرریزشی مشاهده شده است و در مدل عددی نیز در این شرایط جریان کاملاً غیرریزشی مشاهده گردید. با توجه به نتایج حاصل شده در مدل عددی و مقایسه آنها با مدل فیزیکی، و خطای پایین آنها، می‌توان از روشهای عددی کم هزینه و پرسرعت مثل مدل فلونت، بجای آزمایش‌های پرهزینه در مورد سازه‌های هیدرولیکی استفاده نمود.

## منابع

- Cassidy, J.J. (1965) Irrotational flow over spillways of finite height. *J.Hyd.Eng. ,ASCE*, **91**(6), 155-173.
- Sorensen, R.M. (1985) Stepped spillway hydraulic model investigation. *J.Hyd.Eng. ,ASCE*, **111**(12).
- Chanson, H. (2001) The hydraulics of stepped chutes and spillway. *Balkema Publisher*, Tokyo.
- Olsen, N.B.R. and Kjellesvig, H.M. (1998) Three-dimensional numerical flow modeling for estimation of spillway capacity. *J.Hyd.Res. ,IAHR*, **36**(5), 775-84.
- Chen, Q, Dai, G. and Liu, H. (2002) Volume of fluid model for turbulent numerical simulation of stepped spillway over flow. *J.Hyd.Eng. ,ASCE*, **128**(7), 683-688.
- Tabbara, M. Chatila, J. and Awwad, R. (2005) Computational simulation of flow over stepped spillways. *Journal of Computer and Structures*, No.83, 2215-2224.
- نادری‌راد، الف. (۱۳۸۶) مقایسه استهلاک انرژی در سرریز پلکانی با سرریز اوجی (صاف) بوسیله روش عددی (Volume of Fluid)-VOF. سومین کنگره ملی عمران، دانشگاه تبریز.
- Lauder, B.E. and Spalding, D.B. (1972) Lectures in mathematical model of turbulence. *Academic*, London.
- Fluent Inc. *Fluent Users Guide*. (2005).
- سلماسی، ف. (۱۳۸۲) ارزیابی هیدرولیکی سرریز پلکانی. رساله دکتری تاسیسات آبیاری، دانشگاه شهید چمران اهواز.