



کاربرد روش رگرسیون بیزی در مهندسی ژئوتکنیک

مهسا احمدیان نژاد منفرد^۱، سید ناصر مقدس تفرشی^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش مکانیک خاک و پی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

ahmadianmahsa@gmail.com

چکیده

امروزه کاربرد روش‌های مدل‌سازی و رگرسیون در رشته‌های مختلف علوم به طور گسترده رواج یافته است. این روشها برای افزایش کیفیت پیش‌بینی با استفاده از داده‌های نمونه و مجموعه اطلاعات بدست آمده از آزمایش‌ها و تحقیقات مختلف به کار می‌روند. بدیهی است استفاده مناسب از این روشها برای برطرف نمودن بسیاری از عدم قطعیت‌ها و پیش‌بینی نتایج در شرایطی که بدست آوردن اطلاعات سخت و گاهی ناممکن است، بسیار مفید می‌باشد. غالباً روش‌های شبکه‌های عصبی، منطق فازی، رگرسیون‌ها و روش‌های آماری در اینگونه مدل‌سازی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بسیاری از رشته‌های مهندسی لزوم تخمین دقیق نتایج و بدست آوردن روابط بین پارامترها و متغیرهای مؤثر در نتایج، طیف وسیعی از روشهای رگرسیون را بوجود آورده است. از جمله این روش‌های رگرسیون می‌توان از روش رگرسیون بیزی نام برد. به کارگیری این روش در مهندسی ژئوتکنیک برای تفسیر داده‌ها و پیش‌بینی نتایج و پارامترهای بسیاری از مسائل دارای اهمیت بسیار است و این امر از انجام آزمایش‌های پرهزینه و گاهی غیرممکن جلوگیری می‌کند. در تحقیق حاضر پس از بررسی روش و مطالعه معادلات ریاضی مورد استفاده در این نوع رگرسیون، مطالعه موردی برای ارائه مدل پیش‌بینی رفتار لوله‌های مدفون در خاک مسلح تحت بار تکراری (سیکلی) انجام شده است.

واژه های کلیدی : ژئوتکنیک، روشهای آماری، مدل‌های پیش‌بینی، رگرسیون، روش پیش‌بینی بیزی

مقدمه

در بیان ساده رگرسیون بیزی یک تطابق تخصصی تئوری بی، شامل توسعه مدل‌های رگرسیون چند متغیره می‌باشد که بطور واضح دو منبع اطلاعات قبلی و اطلاعات تجربی را در نظر می‌گیرد. در این خصوص اطلاعات قبلی عبارتند از اطلاعاتی که پیش از تجربه شناخته می‌شوند و اطلاعات تجربی اطلاعاتی هستند که از تجربه حاصل می‌شوند. تفسیر و نتایج حاصل از داده های تجربی می‌تواند به طور کلی با آنچه که از دیگر (قبلی) شواهد در مورد موضوع وجود دارد، متفاوت باشد. با این وجود، این تفاوت تفسیر نشان دهنده نادرستی نتایج نیست، بلکه تفسیر نتایج با استفاده از تئوری بی یک روش منطقی ریاضی برای تفسیر جدید شواهد و نتایج می‌باشد. [۱]

تحلیل رگرسیون بیزی مانند رگرسیون کلاسیک، شامل توسعه مدل یا پیش‌بینی روابط بین متغیرها می‌باشد. به عنوان مثال یک معادله پیش‌بینی می‌تواند به فرم خطی زیر باشد:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p \quad (1)$$

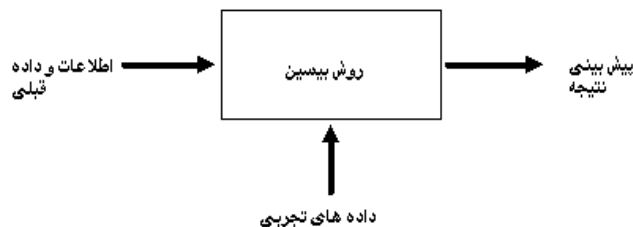
Y در این معادله نشان‌دهنده متغیر وابسته است که بوسیله x_i ها متغیرهای مستقل پیش‌بینی می‌شود که هدف تعیین عددی ضرایب b_j می‌باشد. روش کلاسیک آمار در حل مسائل، جمع‌آوری اطلاعات و تخمین ضرایب بوسیله برگشت دادن y به x با بهترین تطابق داده‌ها می‌باشد. با وجود این، مشکلاتی در روش کلاسیک وجود دارد. از یک طرف جمع‌آوری داده‌ها ممکن است پرهزینه باشد و از طرف دیگر تخمین مقادیر ممکن است معنی‌دار نباشد به طوری که در نهایت روش کلاسیک در توسعه مدل، قضاوت را در هیچ صورت ترکیب نمی‌کند. روش بی در توسعه مدل همانند آنچه در شکل (۱) نشان داده شده است، اطلاعات قبلی و تجربه را ترکیب می‌کند تا یک رابطه را پیش‌بینی کند. روش بی، جواهرهای معتبر و با معنایی را محاسبه می‌کند، بدون آنکه به تنهایی بر روی منابع اطلاعاتی نمونه‌های کوچک استناد کند. همچنین روش بی تصمیم‌گیری در زمان کوتاه همراه با پیشرفت و

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش مکانیک خاک و پی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی ahmadianmahsa@gmail.com

۲. استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی nas_moghaddas@kntu.ac.ir



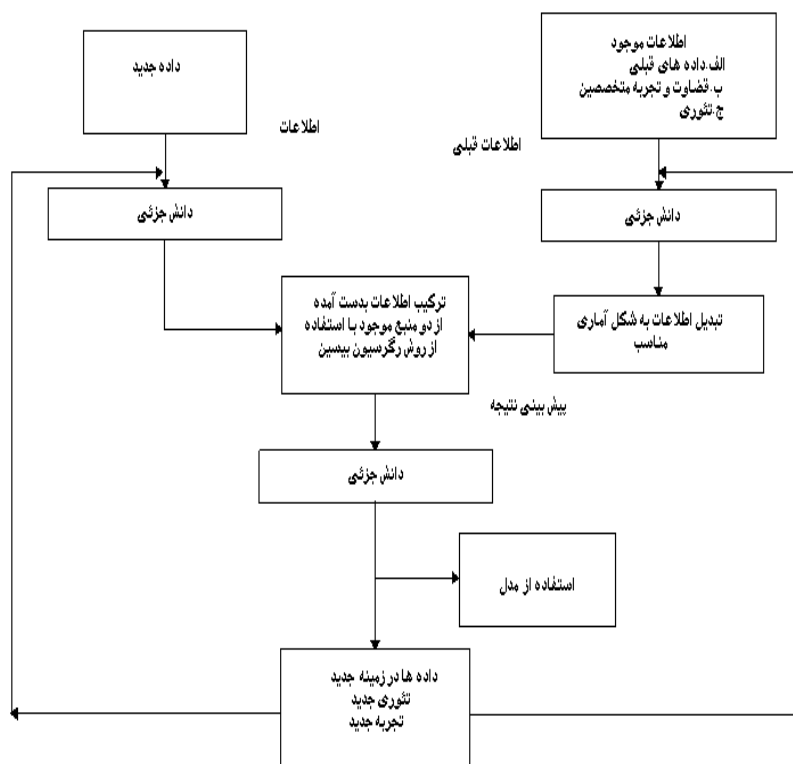
توسعه داده‌ها و قضاوت، و ادامه مدل‌سازی را امکان‌پذیر می‌سازد. راه حل بی به یک تعادل میان دو روش براساس داده‌ها و قضاوت به تنهایی، می‌رسد. این تعادل به صورت ریاضی دقیق، بر اساس تئوری اولیه بی می‌باشد و از سال‌های ۱۹۵۰ توسط ریاضی‌دانانی از جمله ریفا واشلیفر [۳]، پرس، پرات [۴] و زلنر [۵] برای تحلیل رگرسیون پیشرفت داده شده است.



شکل ۱- روش آماری بی

مروری بر مدل رگرسیون بی

شکل (۲) یک دیدگاه کلی از روش بی را نشان می‌دهد. این نمودار رگرسیون بی‌زی را بصورت یک فرایند پیوسته نشان می‌دهد که دانسته‌های جزئی موجود را با داده‌های تازه، به روز می‌کند و یک نتیجه در آینده را ارائه می‌دهد. این فرایند شامل مشخص کردن داده‌های قبلی و اثر آنها در اعتبار نتایج تجربی است. زمانی که داده‌ها و دانسته‌های قبلی با هم سازگار باشند، میزان اطمینان نتایج افزایش می‌یابد. در نتیجه نتایج و مدل‌هایی که از روش رگرسیون بی‌زی بدست می‌آید کاملاً منطقی است و می‌تواند با اطمینان بالا مورد استفاده قرار گیرد. [۲]



شکل ۲: فرایند روش رگرسیون بی

در این خصوص یک مدل ده قسمتی به صورت زیر می‌تواند یک الگوی کلی در رسیدن به یک مدل رگرسیون بی مناسب در مسائل مختلف باشد:
 - تصمیم‌گیری در مورد موضوع مدل: قدم اول تعیین هدف مدل، فضای نتیجه‌گیری مدل و بررسی داده‌های تجربی و اطلاعات اضافی موجود می‌باشد.
 - انتخاب متغیر وابسته: با مشخص شدن هدف مدل، قدم بعدی شناخت متغیر وابسته به طور دقیق‌تر می‌باشد. در این مرحله متغیر مورد نظر جهت پیش‌بینی و مراحل اندازه‌گیری آن متغیر بررسی می‌شود.



- انتخاب نوع مدل: مدل‌های رفتاری و متغیرهای دسته‌ای معمولاً مزایای بیشتری نسبت به مدل‌های ساده تجربی دارند. در این مرحله تشخیص تئوری مناسب برای ایجاد یک مدل تجربی - رفتاری برای پیش‌بینی نتایج و تحقیق در مورد رابطه‌های تجربی ارائه شده توسط محققین دیگر انجام می‌شود.
- انتخاب متغیرهای مستقل: متغیرهای بی‌شماری ممکن است در متغیر وابسته مؤثر باشند و تعداد زیادی انتخاب از متغیرهای مستقل برای مدل رگرسیون وجود داشته باشد. تعداد کمتر متغیرهای مستقل برای مدل مناسب‌تر است و لیست متغیرهای انتخابی نیاز به تجزیه تحلیل دارد. روش‌های متفاوتی برای انتخاب این متغیرها بر اساس طبقه‌بندی و ارزیابی ضرایب همبستگی و کاربرد دیاگرام‌های پراکندگی وجود دارد.
- فرض مدل تابع: بعد از تشخیص نوع مدل و انتخاب متغیرهای مستقل، شکل دقیق مدل می‌تواند انتخاب شود. شکل‌های مختلفی از توابع پتانسیل برای مدل‌های رگرسیون خطی مورد نیاز است. این مدل‌ها شامل مدل‌های خطی ساده تا مدل‌های غیر خطی، لگاریتمی و الگوهای دسته‌ای می‌باشند.
- بسط داده‌های قبلی و جمع‌آوری اطلاعات: تعدادی روش برای بسط مدل‌های رگرسیون داده‌های پیشین وجود دارد. روشهای غیرذهنی در این الگو شامل گرفتن اطلاعات از منابع داده‌های قبلی و مدل‌های موجود می‌باشد. مدل‌های ذهنی شامل مصاحبه با متخصصین در مورد مدل‌های اجرایی است.
- اجرای رگرسیون بیزی: نرم افزار مخصوص رگرسیون برای اجرای رگرسیون کلاسیک بر روی داده‌ها و رگرسیون بیزی بر روی داده‌های قبلی و ورودی داده‌های تجربی به کار می‌رود. یک مقایسه از داده‌های پیشین و نتایج رگرسیون کلاسیک و بی توسط روابط ریاضی - آماری انجام می‌شود.
- استفاده از مدل در اجرای پیش‌بینی: زمانی که اطلاعات قبلی از منابع مختلف موجود باشد، مانند چندین تجربه مختلف، تخمین سازگاری میان این منابع سودمند می‌باشد. روش مورد استفاده در این الگو یک مقایسه مستقیم میان ضرایب مدل‌های قبلی و مقایسه حساسیت خروجی‌ها بر اساس مدل‌های قبلی مختلف با تغییر در ورودی‌هاست. دیگر مقایسه‌هایی که ممکن است برای مدل‌های بخصوص مناسب باشند نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. هدف این گام رسیدن به یک مدل مقدماتی واحد است که اجماعی بر مدل‌های مختلف باشد.
- تخمین مدل: تعدادی مقایسه بین اجماع قبلی، رگرسیون کلاسیک و پیش‌بینی بیزی انجام می‌شود، که این امر شامل تخمین ضرایب احتمال نقاط تابع چگالی مدل، علامت ضریب، بزرگی ضریب و روش آماری نقاط تابع t است. همچنین تمایل نتایج پسین برای اطمینان بیشتر بر روی داده‌های قبلی و اطلاعات موجود می‌تواند به وسیله یک شاخص مقایسه‌ای بین نتیجه داده‌های تجربی و شواهد قبلی، اندازه‌گیری شود.
- مدل تکراری: مدل تکراری اضافی ممکن است مطلوب باشد. این تکرار ممکن است بر اساس تغییر در شکل مدل، مجموعه‌ای از داده‌های تجربی و یا مجموعه‌ای از اطلاعات پیشین اضافی باشد.

معرفی روابط آنالیز رگرسیون کلاسیک

مدل رگرسیون عمومی یک معادله ریاضی به شکل معادله زیر می‌باشد:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (2)$$

که در آن متغیر وابسته یا متغیر پاسخ نیز نامیده می‌شود و مقادیر (x_1, x_2, \dots, x_p) متغیرهای مستقل می‌باشند (متغیرهایی که در تعریف y به کار می‌روند). فرم معروف این مدل، تابع خطی به فرم زیر می‌باشد:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p \quad (3)$$

که x و y مانند فرم کلی معادلات رگرسیون به ترتیب متغیرهای مستقل و وابسته می‌باشند. مقادیر b_1, b_2, \dots, b_p پارامترهای مجهول و p تعداد متغیرهای مستقل می‌باشند.

در عمل n مشاهده بر روی y مطابق n مشاهده بر روی p متغیر مستقل وجود خواهد داشت در نتیجه می‌توان n معادله به فرم معادله (۴) برای هر مشاهده نوشت. n معادله برای بدست آوردن p پارامتر مجهول حل میشود. در نتیجه n باید بزرگتر و مساوی p باشد ($n \geq p$) معادله در شکل ماتریسی بدین صورت نمایش داده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \mathbf{M} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \mathbf{L} & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \mathbf{L} & x_{2p} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \mathbf{L} & x_{3p} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \mathbf{L} & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \mathbf{M} \\ b_p \end{bmatrix} \quad (4)$$



Y یک بردار $nx1$ و x یک ماتریس $(n \times p)$ شامل n مشاهده بر روی p متغیر مستقل است و b یک بردار $px1$ شامل پارامترهای مجهول می‌باشد.

معرفی روابط آنالیز رگرسیون بیزی

رگرسیون بیزی، رگرسیون کلاسیک را به صورت یک شکل کلی‌تر بازسازی می‌کند که دو مجموعه اطلاعات پیشین و داده‌های تجربی را در برمی‌گیرد. ساختار کلی معادلات و روابط بیزی کاملاً شبیه به معادلات رگرسیون کلاسیک می‌باشند. قدم اول در این روش تعیین اطلاعات پیشین است، معادله پیشین شکلی شبیه به معادله رگرسیون کلاسیک مطابق رابطه (۵) دارد:

$$y = b_{pr0} + b_{pr1}x_1 + b_{pr2}x_2 + \dots + b_{prk}x_k \quad (5)$$

k تعداد متغیرهای مستقل، b_{prn} ضرایب رگرسیون پیشین، x_i متغیرهای رگرسیون و y متغیر وابسته می‌باشند. ضرایب رگرسیون پیشین از میانگین ضرایب رگرسیون زده می‌شود. ماتریس متغیرهای مستقل در مشاهدات پیشین به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$X_{PR} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \mathbf{L} & x_{1K} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \mathbf{L} & x_{2K} \\ 1 & x_{31} & x_{32} & \mathbf{L} & x_{3K} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{M} \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \mathbf{L} & x_{nK} \end{bmatrix} \quad (6)$$

و سپس پارامتر A بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$A = g(X_{PR}^t X_{PR}) \quad (7)$$

ضریب g معمولاً ۱ در نظر گرفته می‌شود.

مرحله بعد تحلیل اطلاعات تجربی و بدست آوردن ماتریس صحت داده‌های تجربی است. پارامتر H و ضرایب b براساس ماتریس متغیرهای مستقل X و بر پایه نتایج آزمایشگاهی یا تجربی محاسبه می‌شود. همانند ماتریس X_{PR} ستون اول در ماتریس X مقدار ۱ می‌باشد.

$$H = (X^t X) \quad (8)$$

$$b = H^{-1} X^t Y \quad (9)$$

در روابط فوق بالا نویسی t و -1 بترتیب مبین ترانپوز و معکوس ماتریس می‌باشند.

مدل نهایی

ضرایب پسین، b_{pos} از ترکیب ضرایب بدست آمده از رگرسیون کلاسیک بر روی داده‌های تجربی و میانگین رگرسیون‌های پیشین مطابق رابطه (۱۰) بدست می‌آید. مدل نهایی یک متوسط وزنی از این ترکیب می‌باشد.

$$b_{pos} = M^{-1}(Ab_{pr} + Hb) \quad (10)$$

در این رابطه پارامتر M عبارت است از:

$$M = A + H \quad (11)$$

بنابراین تابع رگرسیون بی خواهد شد:

$$y = b_{pos0} + b_{pos1}x_1 + b_{pos2}x_2 + \dots + b_{posk}x_k \quad (12)$$



مصالح

خاک نوع ۱ به عنوان خاک اصلی استفاده شده و یک نوع ماسه سیلیسی نسبتاً یکنواخت است که اندازه دانه های آن بین ۰/۰۷ و ۱/۲۴ میلی‌متر و مقادیر $C_u=1/51$ ، $C_c=1/29$ ، $D_{50}=0/64$ mm و $G_s=2/67$ می‌باشند. در سیستم طبقه‌بندی یکنواخت، این خاک به صورت SP طبقه بندی می‌گردد. خاک نوع ۲ در زیر و دو طرف خاک نوع ۱ به عنوان زمین طبیعی با اندازه دانه‌های بین ۰/۰۸ و ۲۰ میلی‌متر با $C_u=13/75$ ، $C_c=0/79$ ، $D_{50}=3/7$ mm و $G_s=2/67$ است. در سیستم طبقه‌بندی خاک، این خاک به صورت SP طبقه بندی می‌گردد. لوله مورد استفاده از جنس پلی‌اتیلن با قطر داخلی ۱۱۰ میلی‌متر، ضخامت ۴/۰۳ میلی‌متر و طول ۲۱۰ میلی‌متر و همچنین ژئوگرید استفاده شده در آزمایش از جنس پلی‌اتیلن با دانسیته بالا با ضخامت ۵/۲ میلی‌متر، جرم واحد سطح ۶۹۵ گرم بر متر مربع، مقاومت کششی نهایی $5/8$ kN/m² و مدول ارتجاعی 8000 kg/cm² می‌باشند.

تشریح آزمایش‌های انجام شده

به منظور بررسی اثر پارامترهای دانسیته نسبی خاک (Dr)، تعداد لایه‌های مسلح کننده (N) و نسبت عمق مدفون لوله به قطر لوله (H/D) بر کرنش حداکثر قطر قائم لوله (VDS) تحت اثر بار سیکلی قائم وارد بر سطح ترانشه، از نتایج تعداد ۷۲ آزمایش (تعداد ۴۸ نمونه برای آموزش مدل بیزی و ۲۴ نمونه برای آزمایش صحت عملکرد مدل) استفاده شده‌است. مشخصات آزمایش‌ها و محدوده مورد بررسی پارامترها مطابق جدول ۱ می‌باشد. تمامی آزمایش‌ها تحت بار سیکلی قائم با تنش $5/5$ kg/cm² (معادل حداکثر تنش وارد در اثر تردد کامیون ۴۵ تن ایران) و فرکانس ۰/۵ هرتر بر سطح ترانشه می‌باشد.

جدول ۱- مشخصات آزمایش‌ها و محدوده مورد بررسی پارامترها

تعداد آزمایش	دانسیته نسبی خاک (%)	تعداد لایه مسلح کننده	عمق مدفون
۲۴	۴۲	۵ و ۴؛ ۲؛ ۱؛ ۰	۳؛ ۲/۵؛ ۲؛ ۱/۵
۲۴	۵۷	۵ و ۴؛ ۳؛ ۲؛ ۱؛ ۰	۳؛ ۲/۵؛ ۲؛ ۱/۵
۲۴	۷۲	۵ و ۴؛ ۳؛ ۲؛ ۱؛ ۰	۳؛ ۲/۵؛ ۲؛ ۱/۵

آموزش رگرسیون بیزی

آموزش رگرسیون بیزی با استفاده از یک مجموعه ۴۸ تایی از نتایج آزمایشگاهی انجام شده‌است. این مجموعه نتایج به صورت دو مجموعه ۲۴ تایی برای پیشین و داده‌های تجربی مورد استفاده در رگرسیون بیزی دسته‌بندی شده‌اند. برای بدست آوردن بهترین مدل پیش‌بینی، تعداد زیادی رگرسیون خطی و غیرخطی انجام شد. با استفاده از تکنیک کمترین مقدار مربعات، بهترین مدل با بیشترین مقدار ضریب R^2 و کمترین مقدار E_s انتخاب می‌شود. بهترین معادلات بدست آمده از رگرسیون کلاسیک و رگرسیون بیزی بترتیب مطابق روابط (۱۳) و (۱۴) می‌باشند:

$$\text{LogVDS} = 1.241 - 0.058N - 0.054(H/D)^2 - 2.137D_r^5 \quad (13)$$

$$\text{LogVDS} = 1.222 - 0.0551N - 0.0526(H/D)^2 - 2.088D_r^5 \quad (14)$$

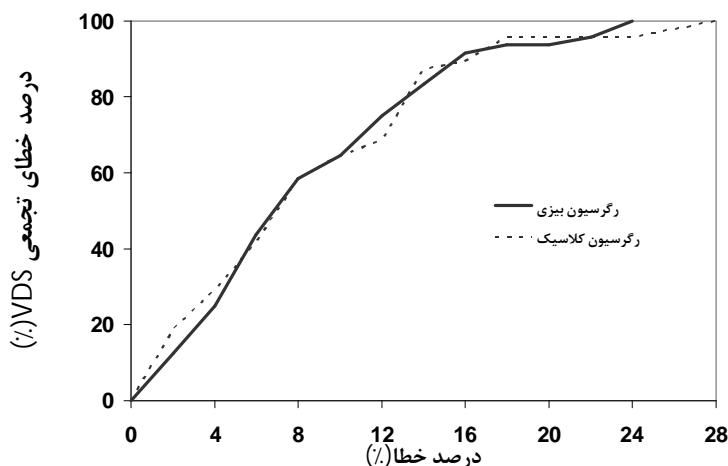
برای ارزیابی مدل رگرسیون بیزی، پارامترهای آماری R^2 ، E_s و همچنین مقادیر ماکزیمم e_{max} و میانگین خطاها e_{ave} برای دو مدل رگرسیون کلاسیک و بیزی در جدول (۲) مقایسه می‌شوند. همانطور که ملاحظه می‌گردد مدل رگرسیون بیزی با داشتن مقدار R^2 بیشتر و E_s کمتر نسبت به رگرسیون کلاسیک مدل پیش‌بینی بهتری است و نیز مقادیر خطاها به خصوص خطای حداکثر در روش بیزی کمتر می‌باشد.

جدول ۲- پارامترهای آماری برای ارزیابی روش رگرسیون بیزی و رگرسیون کلاسیک برای داده‌های آموزشی

پارامتر	روش	e_{ave} (%)	e_{max} (%)	R^2	E_s
VDS	رگرسیون بیزی	۸/۲۳	۲۳/۵۶	۰/۹۶۵۴	۰/۰۴۵
	رگرسیون کلاسیک	۸/۳۳	۲۷/۴۳	۰/۹۵۹۴	۰/۰۴۸



شکل (۴) نمودار درصد خطای تجمعی را برای نتایج بدست آمده از مدل رگرسیون بی‌بیزی و رگرسیون کلاسیک نشان می‌دهد. با توجه به شکل ملاحظه می‌گردد که خطای حداکثر در روش بی‌بیزی کمتر از کلاسیک می‌باشد.



شکل ۴ - نمودار درصد خطای تجمعی در پیش‌بینی مقدار VDS

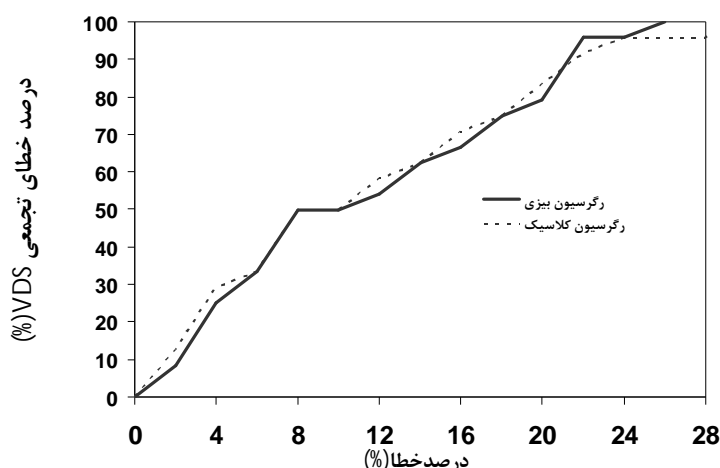
ارزیابی مدل

برای ارزیابی مدل پیشنهادی، یک مجموعه ۲۴ تایی از داده‌های آزمایشگاهی که در آموزش مدل استفاده نشده‌اند، مورد استفاده قرار گرفت. پارامترهای آماری R^2 ، E_s و همچنین مقادیر ماکزیمم و میانگین خطاها برای دو مدل رگرسیون کلاسیک و بی‌بیزی برای داده‌های به کار نرفته در آموزش مدل در جدول (۳) ارائه شده‌اند همانطور که ملاحظه می‌گردد مدل رگرسیون بی‌بیزی با داشتن مقدار R^2 بیشتر و E_s کمتر نسبت به رگرسیون کلاسیک مدل پیش‌بینی بهتری است و نیز مقادیر خطاها به خصوص خطای حداکثر در روش بی‌بیزی کمتر می‌باشد.

جدول ۳ - پارامترهای آماری برای ارزیابی روش رگرسیون بی‌بیزی و رگرسیون کلاسیک برای داده‌های به کار نرفته در آموزش

پارامتر	روش	e_{ave} (%)	e_{max} (%)	R^2	E_s
VDS	رگرسیون بی‌بیزی	۱۰/۸۰	۲۶/۷۰	۰/۹۵۲۰	۰/۰۰۴
	رگرسیون کلاسیک	۱۰/۸۳	۲۹/۸۱	۰/۹۴۳۰	۰/۰۰۴

همچنین شکل (۵) نمودار درصد خطای تجمعی را برای نتایج بدست آمده از مدل رگرسیون بی‌بیزی و رگرسیون کلاسیک نشان می‌دهد. با توجه به شکل ملاحظه می‌گردد که خطای حداکثر در روش بی‌بیزی کمتر از کلاسیک می‌باشد.



شکل ۵- نمودار درصد خطای تجمعی در پیش‌بینی مقدار VDS

نتیجه‌گیری

- ۱- یک ارزیابی مقایسه‌ای بین رگرسیون بیزی و رگرسیون کلاسیک نشان می‌دهد که پیش‌بینی‌های بدست آمده از رگرسیون بیزی در مقایسه با نتایج آزمایش‌ها از پیش‌بینی‌های رگرسیون کلاسیک بهتر می‌باشند. به طور مثال حداکثر درصد خطا در روش بیزی و روش کلاسیک به ترتیب ۲۳/۵۶ ، ۲۷/۴۳ می‌باشند.
- ۲- مقایسه نتایج مدل پیش‌بینی بیزی با مقادیر آزمایشگاهی در مورد داده‌های به‌کار نرفته در آموزش نشان می‌دهد که حدود ۸۰٪ داده‌ها خطایی کمتر از ۲۰٪ دارند.
- ۳- تغییرات VDS به صورت غیرخطی با تراکم نسبی خاک (Dr) ، تعداد مسلح کننده (N) و عمق مدفون لوله (H/D) رابطه دارد.
- ۴- با استفاده از نتایج مدل رگرسیون بیزی می‌توان یک طرح بهینه با در نظر گرفتن عمق مدفون، دانسیته نسبی و تعداد لایه تسلیح برای ایمنی لوله تحت بار سیکلی بدست آورد.

منابع

1. Mrain H., Lyle K., Predicting Roughness Progression of Asphalt Overlays, Canadian Strategic Highway Research Program, 1995.
2. Abowd, J.M., Moulton, B.R. and Zelner, A, User's Guide to PC-BRAP, H.G.B Alexander Research Foundation, Graduate School of Business, University of Chicago, 1984.
3. Raiffa, H. and Schlaifer, R., Applied Statistical Decision Theory, Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University, 1961.
4. Press, S., Bayesian Statistic: Principles, Models and Application, John Wiley and Sons, New York, 1989.
5. Zelner, A, AN introduction to Bayesian Inference in Econometrics, Robert E. Krieger Publishing Co., Malabar, Florida, 1987.
6. S.N. Moghaddas Tafreshi, Gh. Tavakoli Mehrjardi, The use of neural network to predict the behavior of small plastic pipes embedded in reinforced sand and surface settlement under repeated load, Engineering Applications of Artificial Intelligence, In Press, Available online November 2007.