



## رفتار بار تغییر مکان جانبی در سازه‌های با رفتار برشی

### بابک پورآزرم<sup>۱</sup>، شهرام وهدانی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی دکتری عمران- گرایش سازه- دانشکده مهندسی عمران- پردیس دانشکده‌های فنی- دانشگاه تهران

۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران- پردیس دانشکده‌های فنی- دانشگاه تهران

poorazarm@ut.ac.ir

#### خلاصه

استفاده از مدل‌های غیر خطی ساده شده استاتیکی برای تحلیل سازه‌ها تحت بارهای لرزه‌ای اخیراً مورد توجه قرار گرفته است. دسته‌ای از این مدل‌ها که تحت عنوان مدل‌های ترکه‌ای شناخته می‌شوند، رفتار سازه را با استفاده از درجات آزادی تغییر مکان‌های جانبی طبقات مدل می‌کنند. گزینه‌های مختلفی از چنین مدل‌هایی توسط محققین ارائه شده‌اند که با توجه به فرضیات بکار رفته در مدلسازی، هر یک دارای محدوده کاربرد خاصی می‌باشند. در این مقاله، روشی برای ایجاد یک مدل ساده شده برای تحلیل سازه تحت بارهای جانبی ارائه گردیده که قابل کاربرد در همه سازه‌ها بوده و از دقت مناسبی برخوردار می‌باشد. این مدل قابل تعمیم به تحلیل‌های غیرخطی نیز بوده و نکته کلیدی مدلسازی انجام شده، استفاده از مفهوم سختی در تشکیل ماتریس سختی می‌باشد. در انتهای مقاله ضمن بیان یک مثال دقت نتایج مدل پیشنهاد شده در پیش بینی رفتار سازه تحت بارهای جانبی استاتیکی و دینامیکی بررسی شده است. نتیجه بررسی‌ها نشان دهنده دقت مناسب روش در محاسبه پاسخ‌های سازه است. کلمات کلیدی: قاب خمشی، مدل‌های کاهش یافته، ماتریس سختی، تحلیل خطی.

#### مقدمه

استفاده از مدل‌های ساده شده برای تحلیل سازه‌های بلند تحت بارهای جانبی با توجه به حجم قابل توجه محاسبات لازم برای تحلیل این سازه‌ها از دیر باز مورد توجه بوده است و مدل‌های متفاوتی برای تحلیل این سازه‌ها در حالت‌های خطی و غیر خطی ارائه شده‌اند. مدل‌های ساده شده موجود برای تحلیل سازه‌ها تحت بارهای جانبی همگی بر اساس فرضیات ساده کننده‌ای در مورد تغییر شکل‌های سازه استوار هستند. تغییر شکل‌های سازه‌های ساختمانی تحت بارهای جانبی را می‌توان به دو بخش تغییر شکل ناشی از رفتار خمشی سازه و تغییر شکل ناشی از رفتار برشی آن تقسیم کرد. بر مبنای این تقسیم بندی رفتار خمشی سازه تحت بارهای جانبی شامل تغییر شکل‌های ایجاد شده در اثر دوران طبقات و کوتاه و بلند شدن ستونها می‌باشد و رفتار برشی سازه بر اثر رفتار خمشی در اعضای سازه (تیرها و ستون‌ها) و جابجایی افقی در طبقات ایجاد می‌شود. بر اساس این تعاریف رفتار یک قاب خمشی در حالت کلی متأثر از هر دو مود رفتار خمشی و برشی می‌باشد. اثر تغییر شکل‌های خمشی در سازه‌های با تعداد طبقات کم و متوسط ناچیز بوده و قابل صرف نظر کردن است ولی این رفتار در سازه‌های بلند سهم قابل توجهی از تغییر شکل‌های سازه را تشکیل می‌دهد. در این مقاله رفتار قاب‌های ساختمانی دو بعدی تحت بارهای جانبی با در نظر گرفتن هر دو مود رفتار فوق الذکر مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. برخی از مهمترین مدل‌های ساده شده موجود در ادبیات فنی که به منظور تحلیل قاب‌های ساختمانی تحت بارهای جانبی ارائه شده‌اند به قرار زیر می‌باشند:

#### ۱- مدل‌های ترکه‌ای

در مدل‌هایی که تحت عنوان مدل‌های ترکه‌ای شناخته می‌شوند رفتار سازه با استفاده از یک تیر کنسول معادل مدلسازی می‌گردد. سختی هر یک از طبقات در این سازه‌ها با استفاده از یک المان تیر جایگزین مدل می‌شود. مشخصات سختی این تیر با استفاده از سختی اعضای طبقه بدست می‌آید. نمونه‌ای از این مدل‌ها که به مدلسازی قاب‌های سه بعدی می‌پردازد طی مجموعه‌ای از مقالات [1,2,3] ارائه و تکمیل گردیده است. در این مدل تغییر شکل هر طبقه از سازه با ۵ درجه آزادی بیان می‌شود. این درجات آزادی شامل تغییر شکل‌های درون صفحه طبقه و دو درجه آزادی دوران سر ستونهای طبقه حول محورهای افقی می‌باشند. کاهش درجات آزادی سازه اصلی با استفاده از فرضیاتی که در این مدل برای تغییر شکل‌های اعضا به کار رفته است امکانپذیر گردیده است.

#### ۲- قاب جایگزین یک دهانه

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری عمران- گرایش سازه- دانشکده مهندسی عمران- پردیس دانشکده‌های فنی- دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی عمران- پردیس دانشکده‌های فنی- دانشگاه تهران



در این روش مدل‌سازی، یک قاب دوبعدی  $n$  طبقه با تعداد دهانه‌های دلخواه با استفاده از یک قاب معادل یک دهانه و با همان تعداد طبقات مدل‌سازی می‌شود. این معادلسازی با استفاده از فرضیات ساده کننده‌ای مانند وقوع نقاط عطف تغییرشکل تیرها و ستون‌ها در میانه طول اعضا انجام می‌شود. مشخصات اعضای قاب معادل با مساوی قرار دادن ترم‌های مختلف تغییرشکل قاب معادل و سازه اصلی تعیین می‌شوند. این مدل در تخمین تغییرمکان-ها برای آنالیز پایداری و آنالیز دینامیکی قابهایی که نیروهای اعضای آنها مورد نیاز نیست، بسیار مناسب می‌باشد [4]. اخیراً مدل مشابهی به منظور انجام تحلیل‌های غیرخطی قابها معرفی گردیده که به لحاظ فرضیات به کار رفته در آن بسیار به این مدل شباهت دارد [5,6].

### ۳- قاب با شاکتیرهای معادل

در سازه‌های با طبقات تکراری این امکان وجود دارد که تیرهای طبقات مشابه را با یکدیگر جمع کرد و مدلی با تعداد طبقات کمتر ایجاد کرد. فرضیات موجود در این معادلسازی مشابه حالت قبل شامل وقوع نقطه عطف تغییرشکل تیرها و ستون‌ها در وسط طول این اعضا می‌باشد. علاوه بر این فرضیات فرض مشابه بودن تیرهای طبقات جمع‌سازی شده و همچنین یکسان بودن این طبقات از دیگر فرضیات این معادلسازی می‌باشد. معمولاً تیرها در دسته‌های سه تایی یا اگر قاب بسیار بلند باشد در دسته‌های پنج تایی متمرکز می‌شوند [4].

مدل‌های ساده شده فوق برای بیان رفتار قاب‌های خمشی در تحلیل‌های خطی ایجاد شده‌اند. علاوه بر این مدل‌ها برای سازه‌هایی که رفتار ساده تری دارند مانند قاب‌های با کف‌های صلب خمشی [7] و سازه‌هایی با رفتار طره‌ای نیز مدل‌های ساده شده‌ای [8] ارائه شده‌اند. کلیه مدل‌های ساده شده موجود برای تحلیل سازه‌ها تحت بارهای جانبی بر فرضیات ساده کننده‌ای در مورد تغییرشکل‌های اعضای سازه استوار می‌باشند. استفاده از این فرضیات باعث محدود شدن کاربرد این روش‌ها به محدوده خاصی از سازه‌ها می‌گردد. به عنوان نمونه فرض وقوع نقاط عطف تغییرشکل اعضا در میان دهانه آنها که در ایجاد مدل‌های ساده شده در قابهای خمشی کاربرد دارد کاربرد این مدل‌ها را به سازه‌های منظم محدود می‌کند [5]. در مدل‌های ترکیبی موجود برای مدل‌سازی قاب‌های خمشی مدل‌سازی سختی هر طبقه از سازه با استفاده از یک المان که دارای رفتار عمدتاً خمشی است انجام می‌شود و هیچگونه ابزاری برای منظور کردن تغییرشکل‌های ناشی از دوران کف طبقات در این مدل‌ها وجود ندارد. لذا کاربرد این مدل برای سازه‌های با تعداد طبقات زیاد که اثر تغییرشکل‌های خمشی در آنها قابل توجه است صحیح نمی‌باشد. بنابراین هیچ یک از مدل‌های ارائه شده کلیت لازم را برای تحلیل انواع مختلف قاب‌های ساختمانی دارا نمی‌باشند.

ارزیابی رفتار سازه‌ها در بازه رفتار غیر خطی آنها عمدتاً با استفاده از روش‌های استاتیکی جایگزین انجام می‌شود. در این روش‌ها ارزیابی رفتار سازه با استفاده از تحلیل *push over* و با یک پروفیل بار جانبی ثابت انجام می‌شود [9]. پروفیل بار جانبی مذکور با این فرض انتخاب شده که تغییرشکل‌های سازه تحت یک بارگذاری لرزه‌ای در مود اول نوسان آن اتفاق می‌افتد و لذا برای سازه‌هایی که اثر مودهای نوسان بالاتر از مود اول در تغییرشکل‌های آنها قابل توجه است، دارای خطا می‌باشد. با توجه به نقطه ضعف تحلیل *push over* برای در نظر گرفتن اثر مودهای بالاتر در رفتار سازه روش‌های جایگزین دیگری برای تعیین ظرفیت سازه‌ها ارائه شده‌اند. این روش‌ها عمدتاً سعی بر تعمیم تحلیل طیف پاسخ به تحلیل‌های غیرخطی داشته‌اند. لذا در اکثر این روش‌ها مشخصات مودی سازه در گام‌های مختلف تشکیل رفتار غیرخطی سازه محاسبه می‌شوند. بنابراین این روش‌ها نیازمند انجام تحلیل مقادیر ویژه در گام‌های مختلف گسترش رفتار غیرخطی در سازه هستند و هزینه محاسبات آنها بسیار زیاد است. استفاده از مدل‌های ساده شده‌ای که بتوانند رفتار دینامیکی سازه‌ها خصوصاً در بازه غیرخطی را بیان نمایند از الزامات استفاده از این روش‌ها می‌باشد. بنابراین رسیدن به تقریب مناسب در تشکیل مدل‌های کاهش یافته به ویژه در قابهای خمشی، با توجه به کاربرد فراوان و پیچیدگی رفتار آنها در حالت خطی می‌تواند پایه بسیار خوبی را برای تعمیم روش به حالت غیرخطی پایه‌گذاری نماید.

هدف از بررسی حاضر ارائه مدلی است که حداقل در بازه خطی بتواند سازه اصلی را با دقت مناسب و با تعداد درجات آزادی بسیار کمتر نمایندگی نماید. شرایط این مدل‌سازی بقرار زیرند:

- ۱- دقت نتایج مدل بستگی به پروفیل بار خارجی نداشته باشد.
- ۲- قابل تعمیم بودن روش پیشنهادی به حالت غیرخطی و حصول مستقیم ماتریس سختی کاهش یافته با استفاده از مفهوم سختی.

### تشکیل مستقیم ماتریس‌های سازه

روش در نظر گرفته شده در این بررسی برای تشکیل سازه معادل بر مبنای تئوری ماتریسی سازه‌ها و استفاده مستقیم از مفهوم سختی درجات آزادی استوار است. درجات آزادی در نظر گرفته شده برای بیان تغییرشکل‌های سازه تحت بارهای جانبی تغییرشکل‌های درون صفحه طبقات می‌باشند. ضمناً کل جرم سازه به صورت متمرکز در تراز طبقات منظور می‌گردد. روش پیشنهادی جهت اختصار برای قاب‌های دو بعدی پیاده‌سازی شده است ولی استفاده از همین اصول در تحلیل سازه‌های سه بعدی امکانپذیر می‌باشد.

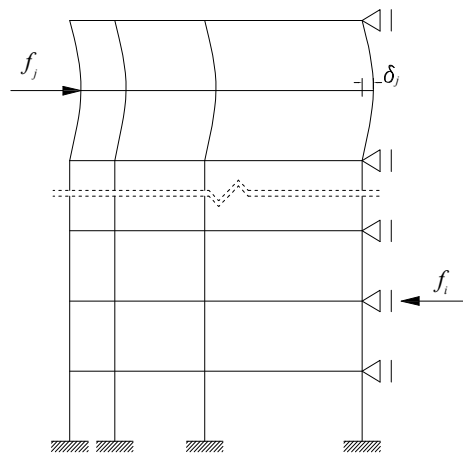
### تشکیل مستقیم ماتریس سختی کاهش یافته

بر اساس مفهوم سختی به کار رفته در تئوری ماتریسی سازه‌ها درایه  $k_{ij}$  در ماتریس سختی سازه برابر است با نیروی ایجاد شده در درجه آزادی  $i$  ام به ازای تغییرمکان واحد درجه آزادی  $j$  ام با فرض عدم وجود تغییرشکل در سایر درجات آزادی. بنابراین مقدار این درایه را می‌توان با استفاده از رابطه ساده زیر محاسبه کرد.



$$k_{ij} = \frac{f_i}{\delta_j} \quad (1)$$

در این رابطه نیروی ایجاد شده در درجه آزادی  $i$  ام و  $\delta_j$  تغییر مکان ایجاد شده در درجه آزادی  $j$  ام می‌باشد. محاسبه ماتریس سختی در این تحقیق بر اساس تعریف فوق و با استفاده از آزمایش‌های عددی که در ادامه شرح داده خواهند شد انجام می‌شود. در مورد یک قاب دویعدی با استفاده از فرض صلبیت سقف‌ها هر طبقه دارای یک درجه آزادی تغییر مکان جانبی می‌باشد و تغییر شکل‌های سازه در اثر بارهای جانبی را می‌توان با همین درجات آزادی بیان کرد. در روش حاضر این درجات آزادی مبنای تشکیل ماتریس سختی می‌باشند. بنابراین ماتریس سختی مدل کاهش یافته در حالت خطی برای یک قاب دویعدی  $n$  طبقه یک ماتریس سختی با ابعاد  $n \times n$  خواهد بود. نمونه‌ای از آزمایشات عددی در نظر گرفته شده برای محاسبه درایه‌های ماتریس سختی فوق در شکل ۱ نمایش داده شده است. برای محاسبه درایه‌های ستون  $i$  ام ماتریس سختی سازه کاهش یافته درجات آزادی تغییر مکان جانبی همه طبقات سازه بجز درجه آزادی  $i$  ام مقید شده و در درجه آزادی  $i$  ام بارگذاری جانبی انجام می‌شود. فرم ماتریسی معادل این شرایط بارگذاری روی سازه در رابطه (2) نشان داده شده است.



شکل ۱- نمونه‌ای از آزمایشات عددی در نظر گرفته شده برای محاسبه درایه‌های ماتریس سختی

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{j1} & K_{j2} & \dots & K_{jj} & \dots & K_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

با تحلیل سازه در این شرایط بارگذاری، تغییر مکان طبقه مورد بررسی و عکس‌العمل تکیه‌گاه‌های جانبی طبقات بدست آمده و با استفاده از رابطه (1) درایه‌های ستون  $i$  ام ماتریس سختی سازه قابل محاسبه می‌باشند. با تکرار این تحلیل برای همه طبقات سازه می‌توان همه درایه‌های ماتریس سختی را محاسبه کرد.

در روش شرح داده شده تشکیل ماتریس سختی سازه معادل با استفاده از نتایج تحلیل سازه اصلی تحت بارهای استاتیکی انجام می‌شود. لذا استفاده از این روش برای انجام تحلیل‌های خطی و در حالت استاتیکی حجم محاسبات بیشتری نسبت به روش‌های معمول می‌طلبد. اصولاً این روش تشکیل سازه کاهش یافته به منظور قابلیت توسعه آن به تحلیل‌های غیرخطی انتخاب شده است و برتری آن نسبت به روش‌های عددی کاهش مرتبه ماتریس سختی مانند فشرده‌سازی استاتیکی از همین جا ناشی می‌شود. ولی این روش برای انجام تحلیل‌های دینامیکی، با توجه به حجم قابل توجه محاسبات مورد نیاز در این تحلیل‌ها و تعداد بسیار کمتر درجات آزادی سازه معادل مناسب بوده و می‌تواند حجم محاسبات را به میزان قابل توجهی کاهش دهد.

### تشکیل ماتریس جرم مدل کاهش یافته

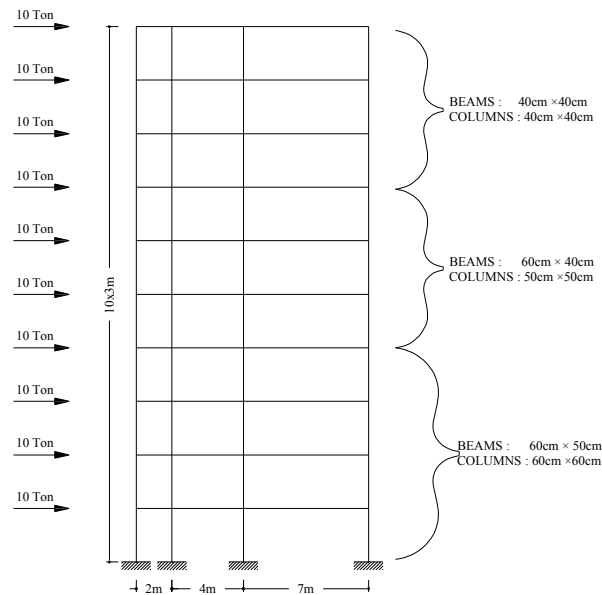
در بخش‌های قبل بیان شد که این مدل‌سازی با فرض تمرکز جرم سازه در تراز طبقات انجام شده است. این فرض در مورد اکثر سازه‌های ساختمانی قابل قبول می‌باشد. بر اساس این فرض، در مورد یک سازه دو بعدی، تنها جرم‌های مؤثر سازه جرم‌های انتقالی طبقات هستند. با توجه به اینکه در تشکیل ماتریس سختی سازه کلیه درجات آزادی جز درجات آزادی تغییر مکان جانبی حذف شدند و فقط این درجات آزادی دارای جرم می‌-



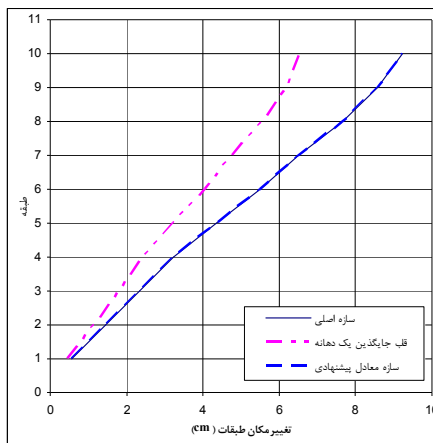
باشند، ماتریس جرم سازه کاهش یافته یک ماتریس جرم قطری خواهد بود. درایه‌های قطر اصلی این ماتریس جرمهای متمرکز طبقات می‌باشند. با توجه به اینکه کاهش مرتبه ماتریس سختی بدون حذف درجات آزادی دارای جرم انجام شده، انتظار می‌رود که این روش خطایی در محاسبه مشخصات دینامیکی سازه ایجاد ننماید [10].

### بررسی یک مثال

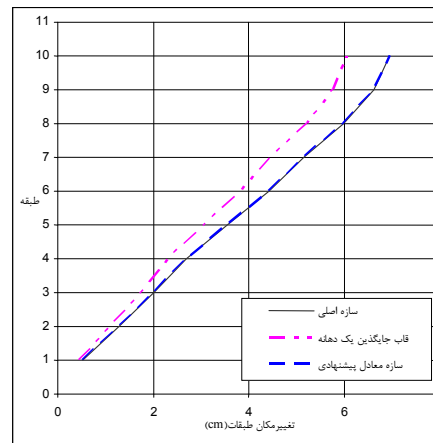
در این بخش ضمن بررسی روش پیشنهادی و روش قاب جایگزین یک دهانه، نتایج تحلیل یک قاب بتنی دو بعدی که مشخصات آن در شکل ۲ نشان داده شده است، با استفاده از روش‌های فوق‌الذکر ارائه می‌گردد. مشخصات هندسی این قاب به گونه‌ای انتخاب شده است که تغییرشکل‌های خمشی قابل توجهی در آن ایجاد گردد. به منظور بررسی دقت روش‌های اشاره شده در مدلسازی رفتارهای خمشی و برشی قاب نتایج تحلیل این سازه تحت بارهای جانبی در دو حالت ارائه خواهد گردید. در حالت اول جایجایی طبقات در اثر رفتار برشی خالص و با صرفنظر از تغییرشکل‌های خمشی سازه محاسبه شده و در حالت دوم تغییرشکل‌های قاب با در نظر گرفتن هر دو رفتار خمشی و برشی آن محاسبه شده‌اند. بار جانبی وارد بر طبقات سازه یک بار جانبی با توزیع یکنواخت و با بزرگای ۱۰ تن در هر طبقه در نظر گرفته شده است. نتایج تغییرمکان‌های طبقات در شکل‌های ۱-۳ و ۲-۳ ارائه شده است. مقادیر پیوندهای طبیعی نوسان سازه بر اساس مدل‌های بیان شده در جدول ۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲- مشخصات هندسی قاب دوبعدی مورد بررسی



(۲-۳)



(۱-۳)

شکل ۳- (۱-۳) تغییرمکان‌های طبقات سازه با رفتار برشی خالص (۲-۳) تغییرمکان‌های طبقات سازه با رفتار خمشی-برشی



جدول ۱- پریودهای طبیعی نوسان سازه

طبقه	رفتار خمشی-برشی			رفتار برشی خالص		
	سازه اصلی	مدل پیشنهادی	قاب جایگزین یک دهانه	سازه اصلی	مدل پیشنهادی	قاب جایگزین یک دهانه
1	0.9179	0.9176	0.7797	0.8070	0.8069	0.7539
2	0.3288	0.3286	0.2958	0.3124	0.3124	0.2929
3	0.1875	0.1874	0.1735	0.1839	0.1839	0.1731
4	0.1271	0.1270	0.1187	0.1252	0.1252	0.1183
5	0.0944	0.0942	0.0884	0.0934	0.0934	0.0883
6	0.0925	0.0758	0.0722	0.0755	0.0755	0.0721
7	0.0786	0.0639	0.0610	0.0637	0.0637	0.0609
8	0.0758	0.0495	0.0471	0.0494	0.0494	0.0471
9	0.0639	0.0408	0.0388	0.0408	0.0408	0.0388
10	0.0594	0.0315	0.0311	0.0315	0.0315	0.0298

با توجه به نتایج تحلیل ارائه شده مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی در محاسبه تغییرمکان های سازه در هر دو حالت رفتار برشی خالص و رفتار خمشی-برشی از دقت بالایی برخوردار است. دقت نتایج تحلیل قاب جایگزین یک طبقه در حالت رفتار برشی خالص بهتر از رفتار خمشی-برشی است. نتایج محاسبه پریودهای طبیعی نوسان سازه که در جدول ۱ ارائه شده‌اند مؤید دقت بهتر مدل پیشنهادی نسبت به قاب جایگزین یک دهانه می‌باشند. با توجه به این نتایج مقایسه کلی این مدلها در جدول ۲ انجام شده است.

جدول ۲- مقایسه روش پیشنهادی با قاب جایگزین یک دهانه

دقت نتایج تحلیل	محدوده کاربرد مدل	نحوه تشکیل مدل کاهش یافته	تعداد درجات آزادی در هر طبقه	
خطای زیر ۱٪	قابل کاربرد در انواع مختلف سازه‌ها	بر اساس نتایج تحلیل سازه اصلی	۱	مدل پیشنهادی
خطا در حدود ۳۰٪	سازه‌های قابی شکل منظم	بدون نیاز به تحلیل سازه اصلی و بصورت مستقیم	۵~۶	قاب جایگزین یک دهانه

### نتیجه‌گیری

نتایج تحلیل‌های انجام شده در بخش‌های قبل نشان دهنده دقت بسیار خوب روش پیشنهادی در تخمین تغییرمکان‌ها و مودهای ارتعاشی سازه اصلی است. از محاسن این روش نسبت به سایر روش‌های موجود برای ایجاد مدل‌های کاهش یافته عدم وجود فرضیات ساده کننده در مورد تغییرشکل‌های اعضای سازه است، این امر باعث تعمیم قابلیت کاربرد این روش به انواع مختلفی از سازه های منظم و نامنظم و با سیستم سازه‌ای دلخواه می‌گردد. همانطور که در بخش‌های قبل اشاره شد روش پیشنهادی در این مقاله برای تشکیل مدل کاهش یافته بر اساس نتایج تحلیل سازه اصلی استوار است و حجم محاسبات نسبتاً زیادی را می‌طلبد، این حجم محاسبات در صورتی که هدف انجام تحلیل خطی سازه تحت بارهای استاتیکی باشد منطقی بنظر نمی‌رسد، ولی همانطور که عنوان شد انتخاب این روش برای کاهش درجات آزادی به منظور تعمیم آن به تحلیل‌های غیر خطی و در حالت دینامیکی بوده است، که در حال حاضر توسط نویسندگان این مقاله در دست مطالعه می‌باشد. با توجه به حجم بسیار بالای محاسبات لازم در تحلیل‌های فوق-الذکر، این روش تشکیل سازه کاهش یافته می‌تواند بسیار مؤثر واقع شود.

### مراجع

1. Thambiratnam DP, Irvine HM. (1989) Analysis of torsionally coupled multistory buildings for microcomputer application. *Journal of computers and structures*, **32**(5), 1175–1182.



2. Thambiratnam DP, Thevendran V. (1992) Simplified analysis of asymmetric buildings subjected to lateral loads. *Computers and structures*, **34**(5), 873-880.
3. Wilkinson S, Thambiratnam D. (2001) Development and application of a simplified procedure for seismic analysis of asymmetric buildings. *Computers and structures*, **79**(32), 2833–2845.
4. Stafford Smith B, Coull A. (1991) *Tall building structures; Analysis and design*. WILEY, USA.
5. Liou G, Kang Y. (1992) Nonlinear response of a building structure to earthquake excitation. *Computers and structures*, **45**(4), 655–665.
6. Nakashima M, Ogawa K, Inoue K. (2002) Generic frame model for simulation of earthquake responses of steel moment frames. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **31**, 671–692.
7. De la llera J.C, Vasquez J, Chopra A.K, Almazan J.L. (2000) A macro-element model for inelastic building analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **29**, 1725–1757.
8. Applied Technology Council (ATC-55 Project). (2005) *Improvement of nonlinear static seismic analysis procedures*. Department of Homeland Security Federal Emergency Management Agency, Washington, D.C.
9. Applied Technology Council. (1996) *Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Building Volume 1*. Seismic Safety Commission, State Of California, USA.
10. Paz M, Leigh W. (2004) *Structural Dynamics; theory and computation*. Kluwer Academic Publishers