



## کاربرد مفهوم آنتروپی در بدست آوردن توزیع سرعت در آبراهه های روباز

محمد حسین امید<sup>۱</sup>، مسعود کرباسی<sup>۲</sup>

۱-دانشیار گروه آبیاری و آبادانی دانشکده آب و خاک دانشگاه تهران

۲- دانشجوی دکتری سازه های آبی دانشکده آب و خاک دانشگاه تهران

Massoud\_karbassi@yahoo.com

### خلاصه

با توسعه تئوریهای آنتروپی و اصل حداکثر آنتروپی توسط شنون در دهه ۱۹۴۰ میلادی و جاینس در دهه ۱۹۵۰ میلادی، این تئوریها در طیف وسیعی از علوم از جمله هیدرولوژی، هیدرولیک و محیط زیست بکار برده شده اند. اولین تلاش جدی در زمینه کاربرد این تئوریها در علوم آب توسط آموروسو و اسپیلدورا (۱۹۷۲) در زمینه مدلسازی هیدرولوژیکی انجام گرفت. تا به امروز کاربردهای متعددی از این تئوری در مهندسی منابع آب گزارش شده و همچنان نیز تلاشهایی در زمینه کاربردهای جدید آن در حال انجام است. معروفترین و رایج ترین روابط توزیع سرعت، توزیع لگاریتمی پرانتل ون کارمن و توزیع توانی می باشند. این دو رابطه در نزدیکی کف غیرمعتبر و در نزدیکی سطح آب هم کم دقت می باشند. (هنگامی که سرعت ماکزیمم زیر سطح آب باشد). چپو در سال ۱۹۸۸ با بکار بردن مفاهیم احتمالاتی و اصل حداکثر آنتروپی معادله توزیع سرعتی را ارائه کرد. این معادله قابلیت تعیین توزیع سرعت در هر دو جهت قائم و عرضی را دارا می باشد. همچنین این معادله در نزدیکی سطح هم به خوبی عمل کرده و موقعیت سرعت حداکثر را پیش بینی می کند. در این مقاله با استفاده از داده های آزمایشگاهی در بسترهای صاف و زبر، مدل توزیع سرعت چپو مورد ارزیابی و تحلیل قرار گرفته است. نتایج نشان می دهد که این مدل با دقت قابل قبولی توانایی پیش بینی توزیع سرعت قائم در آبراهه های روباز را دارا می باشد. همچنین دقت این روش در بسترهای صاف بیشتر از بسترهای زبر می باشد.

کلمات کلیدی: توزیع سرعت، آبراهه های روباز، اصل حداکثر آنتروپی، بسترهای صاف و زبر

### مقدمه

قانون صفرم ترمودینامیک وابسته به دماست، قانون اول ترمودینامیک وابسته به مفهوم انرژی درونی و قانون دوم ترمودینامیک نیز وابسته به متغیری به نام آنتروپی می باشد. آنتروپی برای یک سیستم بصورت زیر تعریف می شود.

$$ds = \frac{dQ}{T}, \oint ds = 0 \quad (1)$$

در رابطه فوق  $ds$  = تغییرات آنتروپی،  $dQ$  تغییرات حرارت و  $T$  دما می باشند.

حرارت انرژی بی نظم میباشد و انرژی نیز می تواند بدون بی نظمی وجود داشته باشد. اصل عمومی این است که انرژی به محض بی نظمی به صورت حرارت در می آید. بالعکس، بی نظمی می تواند بدون انرژی نیز وجود داشته باشد و به محض اینکه بی نظمی دارای انرژی شود به حرارت تبدیل می شود. بنابراین برای نشان دادن حرارت اندازه گیری دو کمیت مورد نیاز می باشد: ۱- اندازه گیری مقدار حرارت و ۲- اندازه گیری مقدار بی نظمی. مقدار انرژی گرمایی با کالری و مقدار بی نظمی با آنتروپی اندازه گیری می شوند.

اگر ارتباطی بین بی نظمی و آنتروپی وجود داشته باشد، بنابراین آنتروپی نیز مانند بی نظمی باید در فرایندهای طبیعی افزایش پیدا کند. در فرایندهای طبیعی تمایل به افزایش بی نظمی می باشد. در مکانیک آماری برای بی نظمی تعریف دقیقی وجود دارد و ارتباط آن با آنتروپی به شکل زیر بیان می شود.

$$S = k \ln w = -k \ln p \quad (2)$$

<sup>۱</sup> دانشیار گروه آبیاری و آبادانی دانشکده آب و خاک دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری رشته سازه های آبی گروه آبیاری و آبادانی دانشکده آب و خاک دانشگاه تهران



در رابطه فوق  $k = \text{ثابت بولتزمن}$ ،  $S = \text{آنترپی سیستم}$  و  $W = \text{پارامتر بی نظمی}$  - احتمال اینکه سیستم در یک حالت باشد. (بسته به حالتهایی که ممکن است وجود داشته باشند).

معادله (۲) آنترپی بولتزمن را تعریف می کند و ترمودینامیک یا مقدار ماکروسکوپی (آنترپی) را با آمار یا مقدار میکروسکوپی (احتمال) را به هم مرتبط می کند. این مفهوم همچنین به شناخت بر پایه آمار قانون دوم ترمودینامیک نیز کمک می کند. بنابراین در ترمودینامیک، آنترپی برای اندازه گیری درجه ناآگاهی از حالت درست یک سیستم بکار برده می شود. در جبر، آنترپی متناسب با لگاریتم احتمال حالت یک سیستم می باشد. در یکی سیستم هیدرولیکی، اگر اتلاف انرژی وجود نداشت، سیستم منظم و سازمان یافته می بود. بنابراین آنترپی می تواند بعنوان معیار (مقیاس) مقدار آشفتگی یک سیستم تفسیر شود. در هیدرولیک، آنترپی مقیاس میزان انرژی غیر قابل بازگشت جریان است که صرف می شود تا بر اصطکاک غلبه شود. سیستم بخشی از انرژی مکانیکی خود را تبدیل به انرژی حرارتی میکند که بعداً در محیط خارج به هدر می رود. بنابراین معادله اتلاف انرژی در هیدرولیک برگرفته از مفهوم آنترپی می باشد.

### آنترپی شنون (Shannon)

از معادله (۲) می توان برای اندازه گیری بی نظمی یک سیستم در حالات محتمل مختلف استفاده کرد. این مساله منجر به توسعه تئوری آنترپی برای بیان اطلاعات و عدم قطعیت توسط شنون (۱۹۴۸) شد. برای فهم جنبه اطلاعاتی آنترپی ما یک گروه شامل  $n$  رویداد را در نظر می گیریم. عدم قطعیت موقعیتی است که ما دانشی نسبت به وقوع کدام رویداد از  $n$  رویداد ممکن را نداشته باشیم. بر پایه اطلاعات ما از رویدادها، عدم قطعیت ممکن است کم یا زیاد می باشد. برای مثال تعداد کل رویدادها یک قسمت از اطلاعات است و تعداد رویدادهای با احتمال وقوع غیر صفر هم یک بخش دیگر از اطلاعات است. در صورت داشتن توزیع احتمال رویدادها، اطلاعات مطمئنی را فراهم می کند. شنون (۱۹۴۸) یک مقیاس کمی را برای عدم قطعیت مرتبط با توزیع احتمال یا محتوای اطلاعات، یک توزیع را بر پایه آنترپی تعریف کرد. این مفهوم به عنوان آنترپی شنون یا آنترپی اطلاعاتی نامگذاری شده است. عدم قطعیت با استفاده از آنترپی می تواند کمی شود. بنابراین، آنترپی مقیاسی است برای اندازه گیری کمی عدم قطعیت که با توزیع احتمال بیان می شود و مقیاسی است برای آشفتگی و نبودن اطلاعات درباره سیستم. اگر اطلاعات کامل در دسترس باشد، در نتیجه آنترپی برابر صفر خواهد بود. در غیر این صورت بزرگتر از صفر خواهد بود. در واقع آنترپی شنون حالت وزن دار آنترپی بولتزمن می باشد. این مفهوم برای یک متغیر ناپیوسته به شکل زیر بیان می شود:

$$S = -\sum p_i \ln p_i \quad (3)$$

برای یک متغیر پیوسته آنترپی شنون به شکل زیر نوشته می شود.

$$S = -\int_0^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (4)$$

### ۱-۳- اصل آنترپی ماکزیمم

Jaynes (۱۹۵۷) اصل آنترپی ماکزیمم را تدوین کرد (POME)<sup>۱</sup>. بر طبق این اصل هنگامی که استنتاجی بر اساس اطلاعات ناکامل انجام می شود، توزیع احتمال رسم شده باید بر طبق اطلاعات موجود (محدودیت ها) حداکثر آنترپی را داشته باشد. بصورت ریاضی ما آنترپی شنون را حداکثر می کنیم:

$$\text{Maximize } S = -\int_0^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (5)$$

اطلاعات موجود بعنوان شرایط مرزی و محدودیت های ما می باشد.

$$\int_0^{\infty} g_i(x) f(x) dx = E[g_i(x)] \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

حل معادله ۹ با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ نتیجه زیر را می دهد:

$$f(x) = \exp \left[ -\lambda_0 - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) \right] \quad (7)$$

$\lambda_i$  ها ضرایب لاگرانژ هستند. و  $i = 0, 1, 2, \dots, m$

از تئوری آنترپی می توان به دو صورت زیر در منابع آب و محیط زیست استفاده کرد:

<sup>1</sup>. Principle of maximum entropy



- ۱- تئوری آنتروپی بعنوان یک ابزار تصمیم گیری در مسائل منابع آب و محیط زیست
  - ۲- تئوری آنتروپی بعنوان یک ابزار مدلسازی در مسائل منابع آب و محیط زیست
- در مورد بخش اول می توان به کاربردهای زیر اشاره کرد:
- ۱- معیاری برای انتخاب مدل (Criteria for model selection)
  - ۲- آزمون یک فرضیه (Hypothesis testing)
  - ۳- برآورد ریسک (Risk assessment)
  - ۴- برآورد ایمنی (Safety evaluation)
- در مورد بخش دوم نیز می توان به موارد زیر اشاره کرد:
- ۱- استخراج توزیع های احتمال (Derivation of probability distributions)
  - ۲- تحلیل طیفی آنتروپی حداکثر برای پیش بینی جریان (Maximum entropy-spectral analysis for flow forecasting)
  - ۳- ژئومورفولوژی حوضه (Basin geomorphology)
  - ۴- طراحی شبکه های هیدرولوژیکی (Design of hydrologic networks)
  - ۵- هیدرولوژی زیرسطحی (Subsurface hydrology)
  - ۶- کاربرد در هیدرولیک (Application in hydraulics)
  - ۷- برآورد کیفیت آب (Water quality assessment)
  - ۸- بهینه سازی (Optimization)

#### کاربرد آنتروپی در بدست آوردن توزیع سرعت در آبراهه های روباز

توزیع سرعت در مقطع عرضی یک کانال تحت تاثیر هندسه کانال، زبری و وجود پیچ قرار دارد. این مساله باید قبل از حل مسائل مختلف هیدرولیکی در آبراهه های طبیعی مطالعه و تعیین شود. برای مثال اندازه گیری دبی یکی از مسائل مهم در مدیریت منابع آب می باشد. معادلات توزیع سرعت معروف شامل توزیع لگاریتمی پراتنل ون کارمن و توزیع توانی ساده می باشند. این دو معادله توانایی شبیه سازی توزیع سرعت در هنگام وقوع سرعت ماکزیمم در زیر سطح آب را ندارند. با بکار بردن مفاهیم احتمالاتی و اصل ماکزیمم آنتروپی (Shannon ۱۹۴۸ و Chiu ۱۹۸۹) چيو در سال ۱۹۸۹ معادله توزیع سرعتی را به شکل عمومی زیر بدست آورد:

$$u = \frac{u_{\max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \right] \quad (8)$$

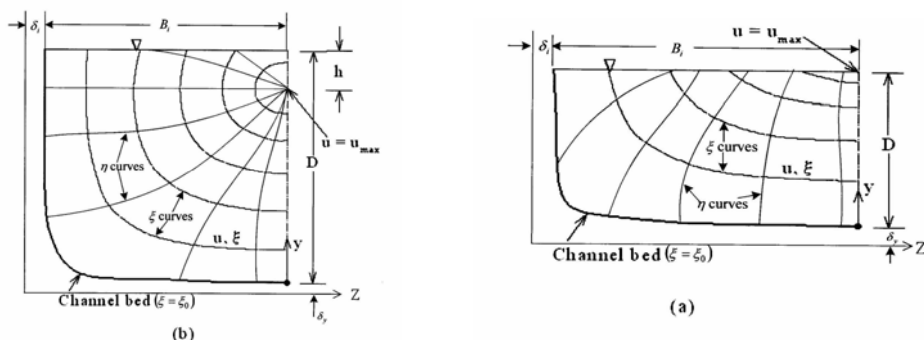
که در آن  $u$  = سرعتی که بصورت یکنواخت با  $\xi$  افزایش می یابد،  $u_{\max}$  = سرعت حداکثر در یک سطح مقطع، برای هر خط هم سرعت یک مقدار  $\xi$  اختصاص داده می شود که در آن سرعت ثابت است،  $\xi_{\max}$  = مقدار حداکثر  $\xi$  در جایی که  $u = u_{\max}$  است،  $\xi_0$  = مقدار حداقل  $\xi$  که در کف کانال اتفاق می افتد و همچنین خط هم سرعتی که  $u = 0$  باشد.  $M$  نیز یک پارامتر آنتروپی می باشد. در آبراهه های روباز که احتمال وقوع سرعت حداکثر در زیر سطح آب وجود دارد، معادله ای توسط Chiu و Chiu (۱۹۸۶) برای  $\xi$  بدست آمده است.

$$\xi = Y(1 - Z)^{N_i} \exp(N_i Z - Y + 1) \quad (9)$$

$$Y = \frac{y + \delta_y}{D + \delta_y - h} \quad (10)$$

$$Z = \frac{|z|}{B_i + \delta_i} \quad (11)$$

شکل ۱ محورهای مختصات و متغیرها و پارامترهای موجود در روابط ۹ تا ۱۱ را نشان میدهد.



شکل ۱- الگوی سرعت در مختصات منحنی الخطی (a) وقوع سرعت حداکثر در سطح آب و (b) وقوع سرعت حداکثر در زیر سطح آب

می توان معادله توزیع یک بعدی سرعت را در سه حالت زیر بیان کرد:

۱- سرعت ماکزیمم در فاصله  $h$  در زیر سطح آب اتفاق می افتد ( $h > 0$ ). در این حالت  $\xi_{\max} = 1$  و  $\xi_0 = 0$ ، در نتیجه بر طبق معادله ۸ نتیجه زیر بدست می آید:

$$u = \frac{u_{\max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{y}{D-h} \exp \left[ 1 - \frac{y}{D-h} \right] \right] \quad (12)$$

۲- سرعت ماکزیمم بر روی سطح آب اتفاق می افتد و  $h = 0$ ، بنابراین  $\xi_{\max} = 1$ . در این حالت معادله ۱۲ به شکل زیر در می آید:

$$u = \frac{u_{\max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \exp \left[ 1 - \frac{y}{D} \right] \right] \quad (13)$$

در این معادله  $\frac{du}{dy}$  در سطح آب صفر می باشد. بنابراین می تواند منحنی سرعت عمود بر سطح آب را توصیف کند.

۳- سرعت ماکزیمم در سطح آب اتفاق می افتد و  $h < 0$ ،  $\left( \frac{du}{dy} > 0 \right)$ . در این حالت  $h$  معنی فیزیکی همانند حالت‌های ۱ و ۲ را ندارد.  $h$  فقط

ضریبی است که انحنای توزیع سرعت را مشخص می کند. در این حالت مقدار  $\xi_{\max}$  به صورت زیر می باشد:

$$\xi_{\max} = \frac{D}{D-h} \exp \left[ 1 - \frac{D}{D-h} \right]$$

در نتیجه معادله ۱۳ به شکل زیر در می آید:

$$u = \frac{u_{\max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \exp \left( \frac{D-y}{D-h} \right) \right] \quad (14)$$

اگر  $h$  به مقدار  $-\infty$  میل کند، داریم:

$$u = \frac{u_{\max}}{M} \ln \left[ 1 + (e^M - 1) \frac{y}{D} \right] \quad (15)$$

معادله ۱۵ توزیع سرعت در آبراهه روباز عریض را شرح می دهد.

### مواد و روشها

به منظور بررسی دقت توزیع سرعت چپو از تعدادی آزمایش صورت گرفته در فلوم موجود در آزمایشگاه هیدرولیک گروه آبیاری و آبادانی دانشگاه تهران استفاده گردید (مهدوی (۱۳۸۲) و کرباسی (۱۳۸۴)). طول کانال ۱۲ متر، عرض آن ۰/۲۵ متر و شیب آن نیز قابل تغییر می باشد. به منظور اندازه گیری سرعت در عمق های مختلف و رسیدن به پروفیل در مقاطع دلخواه، از یک دستگاه میکرومولینه با قطر پروانه ۱۰ میلیمتر استفاده گردید. فرم های بستر مصنوعی مورد استفاده در این تحقیق از جنس پلکسی گلاس با ضخامت ۸ میلیمتر بوده و ابعاد آنها نیز با استفاده از روابط ارائه شده برای تلماسه محاسبه گردیده است. در نهایت با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده از روابط ارائه شده و ابعاد بکار برده شده در آزمایشهای مختلف، برای تلماسه ها، ابعاد زیر در نظر گرفته شدند.

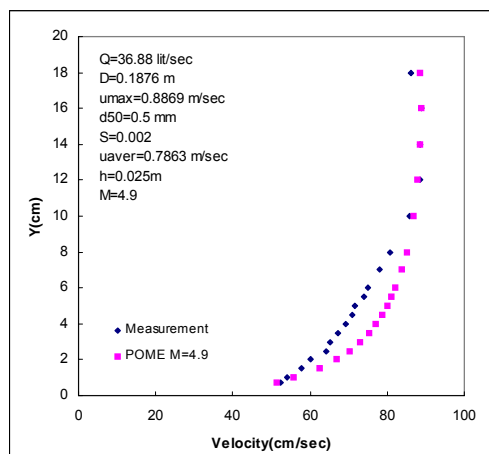
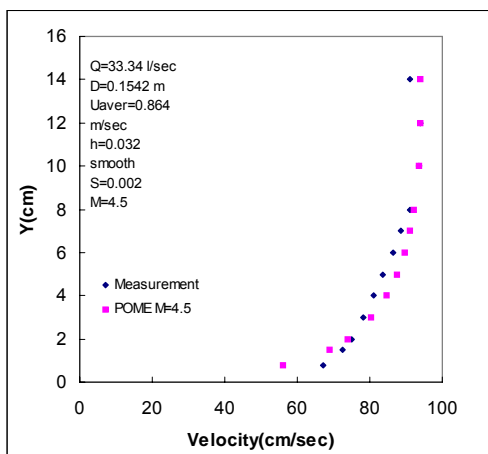
ارتفاع تلماسه ها = ۴ سانتیمتر و طول تلماسه ها = ۱۱۸ سانتیمتر



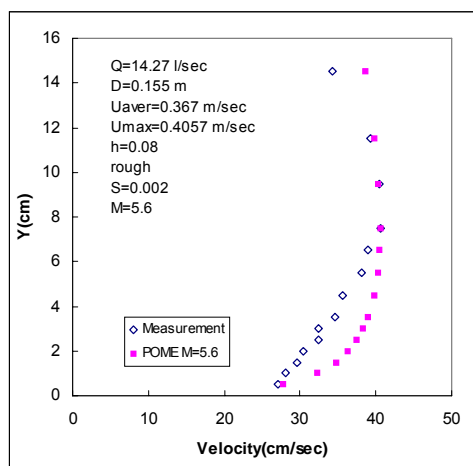
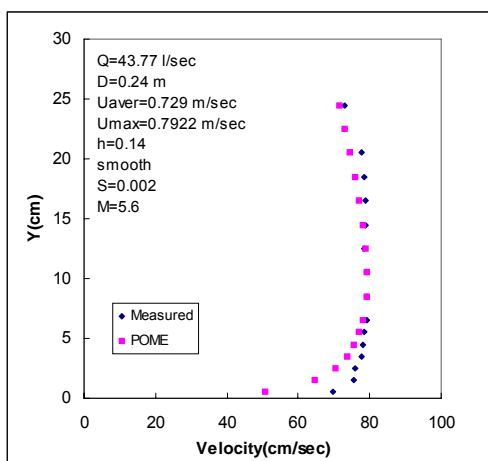
داده های آزمایشگاهی مورد استفاده به شکل زیر می باشند:

- ۱- بستر بدون فرم با کف صاف
- ۲- بستر بدون فرم با کف زیر  $d_{50} = 0.5mm$
- ۳- بستر بدون فرم با کف زیر  $d_{50} = 2.84mm$
- ۴- بستر فرم دار با کف صاف
- ۵- بستر فرم دار با کف زیر  $d_{50} = 0.5mm$

نتایج



شکل ۲- مقایسه پروفیل های سرعت اندازه گیری شده و مدل POME در بستر بدون فرم صاف و زیر



شکل ۳- مقایسه پروفیل های سرعت اندازه گیری شده و مدل POME در بستر فرم دار صاف و زیر

میزان خطای مدل در تعیین توزیع سرعت

جدول ۱ میزان خطای متوسط را در آزمایشهای مورد بررسی در این تحقیق را در سه حالت صاف، با زبری  $d_{50} = 0.5mm$  و  $d_{50} = 2.84mm$  نشان می دهد. همچنان که مشاهده می شود، میزان خطا در حالت صاف از بقیه کمتر بوده و در دو حالت زبر تقریباً مقدار خطا یکسان می باشد. همچنین مشاهده می شود که مقدار M نیز با زبری کاهش می یابد. در جدول ۲ نیز خطای متوسط مشاهده شده در بسترهای فرم دار زبر و صاف ارائه شده است.



جدول ۱- خلاصه ای از پارامترهای هر آزمایش و مقدار خطا در هر آزمایش (بستر بدون فرم)

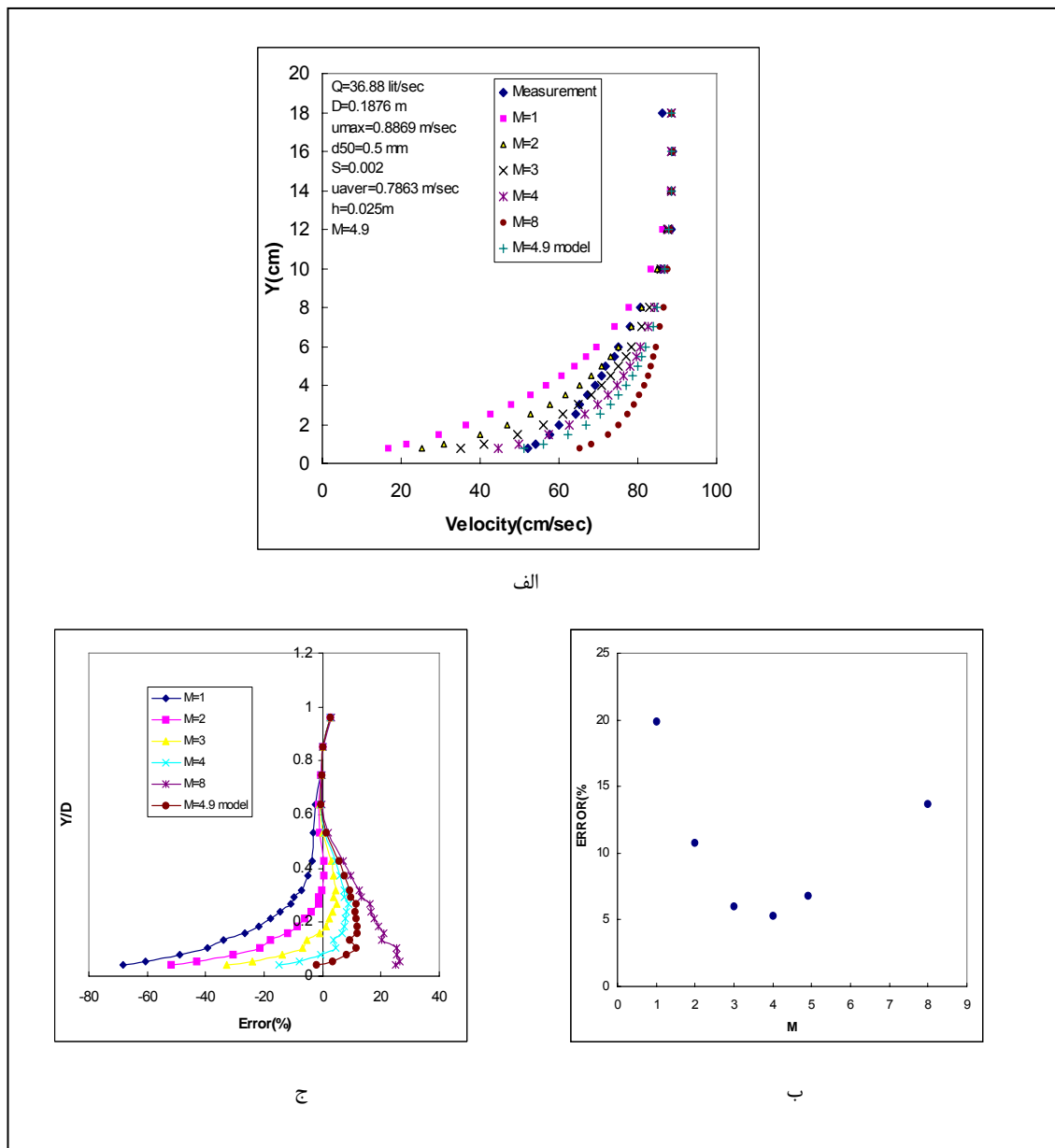
Q(lit/sec)	y(m)	$u_{aver}$ (m/sec)	$u_{max}$ (m/sec)	M	$d_{50}$ (mm)	$u^*$ (cm/sec)	Error
smooth							
14.190	0.081	0.703	0.740	5.000	0.000	3.240	1.537
33.340	0.154	0.865	0.940	4.500	0.000	3.220	3.820
20.300	0.107	0.757	0.820	4.600	0.000	3.240	4.948
4.435	0.033	0.544	0.630	5.600	0.000	2.900	2.670
8.486	0.060	0.566	0.620	5.400	0.000	2.650	1.560
10.680	0.073	0.589	0.623	5.000	0.000	3.040	1.360
$D_{50}=0.5$							
36.880	0.188	0.786	0.887	5.000	0.500	4.030	6.760
19.050	0.115	0.664	0.764	4.800	0.500	3.700	8.520
13.850	0.088	0.623	0.696	4.500	0.500	3.450	6.320
40.200	0.189	0.850	0.980	5.000	0.500	4.640	10.520
29.880	0.158	0.757	0.855	4.300	0.500	4.160	7.210
$D_{50}=2.84$							
40.970	0.166	0.989	1.140	4.400	2.840	7.112	8.030
45.130	0.175	1.030	1.180	4.400	2.840	6.870	5.960
20.800	0.095	0.879	1.000	4.700	2.840	6.710	9.820
30.680	0.130	1.030	1.070	4.400	2.840	6.830	8.980

جدول ۲- خلاصه ای از پارامترهای هر آزمایش و مقدار خطا در هر آزمایش (بستر با فرم)

Q(lit/sec)	y(m)	$u_{aver}$ (m/sec)	M	bed form	$d_{50}$ (mm)	Error
smooth						
43.770	0.261	0.713	5.600	yes	0.000	5.043
18.240	0.131	0.565	5.600	yes	0.000	4.000
37.050	0.218	0.687	5.600	yes	0.000	4.042
Rough						
35.070	0.231	0.642	5.000	yes	0.500	5.059
23.080	0.185	0.499	5.600	yes	0.500	8.220
14.270	0.143	0.420	5.600	yes	0.500	6.550

## میزان تاثیر پارامتر M بر توزیعیهای سرعت

شکل (۴-الف) تاثیر تغییرات پارامتر M را بر توزیعیهای سرعت در یکی از آزمایشهای انجام شده در بستر زبر شده نشان میدهد. همچنین در شکلهای (۴-ب) و (۴-ج) نیز درصد خطای متوسط در هر آزمایش نشان داده شده است.



شکل ۴- مقایسه پروفیل‌های سرعت با ضرایب M مختلف

## نتیجه گیری

- ۱- اصل آنتروپی را می توان بعنوان وسیله‌ای برای افزایش کاربرد اصول احتمالات در هیدرولیک دانست. این بدان معناست که تابع توزیع احتمال متغیرهای هیدرولیکی را می توان با حداکثر کردن آنتروپی بدست آورد. از این تابع توزیع احتمال می توان برای بدست آوردن توزیع مکانی متغیرهای هیدرولیکی در شرایط هیدرولیکی مختلف استفاده نمود.
- ۲- با استفاده از حساب تغییرات و حداکثر کردن آنتروپی می توان مدلی را برای توزیع سرعت یک بعدی و دو بعدی در آبراهه های روباز ارائه کرد.
- ۳- با توجه به وابستگی شدید مدل POME به پارامتر M ، در تعیین این ضریب باید دقت زیادی کرد.

## مراجع

۱. کرباسی ، مسعود ۱۳۸۴ ، بررسی اثر حرکت بار بستر بر مقاومت هیدرولیکی جریان در حضور فرم های بستر ، پایان نامه کارشناسی ارشد ، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی ، دانشگاه تهران
۲. مهدوی ، علی ۱۳۸۲ ، بررسی اثر حرکت بار بستر بر روی مقاومت هیدرولیکی جریان در کانالهای صاف و بسترهای رسوبی ، پایان نامه کارشناسی ارشد ، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی ، دانشگاه تهران



3. Chiu, C.-L., 1989. Velocity distribution in open-channel flow *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE 115 (5), 576–594.
4. Chiu, C.-L. “Entropy and Probability Concepts in Hydraulics,” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 5 (1987), pp. 583-600.
5. Chiu, C.-L. “Application of Entropy Concept in Open Channel Flow Study,” *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 15 (1991), pp. 615-628.
6. Hsu, M-H and Chiu, C.-L. "Probability-based simulation of 2-D velocity distribution and discharge estimation in open channel flow" Doctoral Dissertation, Dept. of Civil Engineering, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA, 2004.
7. Jaynes, E. T. 1957a. `Information theory and statistical mechanics, I', *Phys. Rev.*, 106, 620±630.
8. Jaynes, E. T. 1957b. `Information and statistical mechanics, II', *Phys. Rev.*, 108, 171±190.
9. Shannon, C. E. 1948a. `A mathematical theory of communications, I and II', *Bell System Tech. J.*, 27, 379±443.
10. Singh, VP (2000) “ The entropy theory as a tool for modeling and decision making in environmental and water resources” *Water SA* Vol.26 NO.1 January available on website <http://www.wrc.org.za>