



## بررسی روش وسترگارد در تعیین نیروهای زلزله وارد بر سدها با استفاده از روش المانهای محدود

رامین امینی<sup>۱</sup>

۱- استادیار- شاهرود- دانشگاه صنعتی شاهرود- گروه عمران و معماری

[Amini.Ramin@gmail.com](mailto:Amini.Ramin@gmail.com)

### خلاصه

روش وسترگارد در محاسبه نیروهای دینامیکی آب بر سدها در خلال زلزله با نتایج المانهای محدود مقایسه گردیده است. مقایسه در سه حالت مختلف صورت گرفته است. در تمام این سه حالت مسئله تحت بارگذاری هارمونیک با پریود بیش از مد اول سیستم قرار گرفت. نتایج مقایسه نشان میدهد که روش وسترگارد نتایج بسیار خوب و در گاهی اوقات یکسان با روش المان محدود بدست میدهد. بنابراین در سدهایی که پریود ارتعاش مد اول آنها کمتر از پریود غالب ارتعاشات زلزله است، بخوبی میتوان از روش وسترگارد برای تعیین نیروهای آب وارد بر سد در خلال زلزله استفاده نمود.

کلمات کلیدی: وسترگارد - المانهای محدود - اندرکنش سد و مخزن - نیروهای زلزله

### ۱- مقدمه

در سال ۱۹۳۳ میلادی وسترگارد [1] در مقاله ای تحت عنوان فشارهای آب روی سدها در خلال زلزله، برای نخستین بار بطور تحلیلی فشار هیدرودینامیک آب بر روی سدها را تحت اثر حرکت هارمونیک افقی زمین محاسبه کرد. در سال ۱۹۵۳ میلادی، دو محقق به نام های زنگار و هافلی [2]، مقادیر فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدها را توسط روش شبیه سازی الکتریکی بدست آوردند. سپس هاتانو [3]، از ژاپن موفق شد مقدار فشار هیدرودینامیک را با در نظر گرفتن خاصیت تراکم پذیری سیال، در هنگام وقوع زلزله محاسبه نماید. در ادامه چوپرا [4] با در نظر گرفتن تراکم پذیری آب، نشان داد که در مورد سیال تراکم ناپذیر حل وسترگارد در کلیه فرکانسهای بارگذاری صادق است، لیکن در سدهای بلند، تاثیر تراکم پذیری آب بر پاسخ فشار هیدرودینامیک در فرکانسهای بالا قابل توجه است. وی مقاله خود را در سال ۱۹۶۷ میلادی تحت عنوان فشار هیدرودینامیک وارد بر بدنه سدها در هنگام وقوع زلزله ارائه نمود.

او در تحقیقات خود موفق شد که اثرات ارتعاش زمین بر بدنه سد و مخزن را به نحو مناسبی در نظر گرفته و سیستم درگیر سد و مخزن را به نحو مطلوبی مدل سازی نموده و راه حل تحلیلی مناسبی برای آن ارائه نماید. به موازات پیشرفت روشهای تحلیلی، با در دسترس قرار گرفتن کامپیوترها و تکامل سریع آنها، استفاده از روش های عددی نیز برای تحلیل دینامیکی سیستمهای سد و مخزن بطور گسترده ای متداول گردید. مقالات متعددی در زمینه چگونگی استفاده از روشهایی همچون روش المان های محدود برای محاسبه فشارهای هیدرودینامیک ناشی از زلزله در سدها به نگارش در آمده است. از جمله محققان در این زمینه می توان از زینکوویچ [5] و شانان [6] نام برد.

### ۲- روش وسترگارد

برای تعیین نیروهای دینامیکی وارد بر سدها در خلال زلزله وسترگارد از فرضیاتی به شرح زیر استفاده نمود.

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه شاهرود



۱- رفتار سیستم دو بعدی است. ۲- سد با دیواره قائم و صلب می باشد. ۳- کف مخزن افقی و صلب است. ۴- طول مخزن در جهت بالادست نامحدود است. ۵- شتاب زمین افقی و هارمونیک است. ۶- پیوند شتاب زمین بیش از پیوند طبیعی مخزن است. ۷- تغییر شکلها کوچک هستند. ۸- سیال محیطی همگن، ایزوتروپ و با تراکم پذیری خطی در نظر گرفته می شود. ۹- اثر امواج سطحی در نظر گرفته نمی شود. میزان فشار در هر نقطه از آب مخزن قابل تراکم تحت اثر حرکات دینامیکی را میتوان بوسیله معادله هلمهولتز که بشکل زیر است محاسبه نمود.

$$\nabla^2 P = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1)$$

در رابطه فوق فشار هیدرودینامیک و  $C$  سرعت موج اکوستیک در آب میباشند. میتوان شتاب ارتعاشات هارمونیک زمین را بصورت  $a_g = a g e^{i\omega t}$  فرض نمود. در این رابطه  $a$  ضریب زلزله که در شتاب ثقل  $g$  ضرب میشود و  $\omega$  فرکانس زاویه ای ارتعاشات هارمونیک میباشد. وسترگارد بر اساس فرضیات فوق، با حل معادلات دیفرانسیل مربوطه و اعمال شرایط مرزی، فرمول زیر را برای تعیین فشار هیدرودینامیک مخزن تحت اثر ارتعاشات هارمونیک زمین ارائه کرد:

$$P = \frac{4\rho a g h}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)q_n} \text{Exp}(-q_n x) \cos(k_n y) \text{Exp}(i\omega t) \quad (2)$$

در این رابطه  $\rho$  جرم مخصوص آب،  $h$  ارتفاع مخزن و مقادیر  $q_n$  و  $k_n$  توسط روابط زیر محاسبه میگردند:

$$k_n = \frac{\omega_n}{C} \quad (3)$$

$$q_n = k_n \cdot C_n \quad (4)$$

$$C_n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_n^*}\right)^2} \quad (5)$$

در این روابط  $\omega_n$  و  $T_n$  بترتیب مقادیر فرکانس زاویه ای و پیوند مود  $n$ ام مخزن میباشند که توسط روابط زیر محاسبه میگردند:

$$\omega_n = \frac{(2n-1)pC}{2h} \quad (6)$$

$$T_n = \frac{4h}{(2n-1)C} \quad (7)$$

با قرار دادن  $\omega_n$  و  $W$  در معادله ۵ خواهیم داشت.

$$C_n = \sqrt{1 - \left(\frac{4h}{(2n-1)CT}\right)^2} \quad (8)$$

ضریب  $\text{Exp}(-q_n x)$  در معادله ۲ نشان میدهد که هرچه از بدنه سد به سمت بالادست مخزن دور شویم، فشار هیدرودینامیک کوچکتر شده و مستهلک میگردد و در نهایت توزیع فشار هیدرودینامیک در عمق مخزن به شکل یک تابع کسینوسی میباشد اگر پیوند ارتعاش هارمونیک وارده به مخزن که با  $T$  نشان داده میشود با یکی از پیوندهای طبیعی مخزن برابر گردد، مقدار  $C_n$  در رابطه ۸ صفر گردیده و طبق فرمول وسترگارد، مقدار فشار به سمت بی نهایت میل خواهد کرد که نشان دهنده پدیده تشدید میباشد. همچنین اگر  $T$  کوچکتر از اولین پیوند طبیعی مخزن یعنی  $T_1$  باشد مقدار  $C_n$  در رابطه ۸ موهومی گشته و رابطه وسترگارد قادر به تعیین جواب نخواهد بود. لذا شرط وجود جواب آن است که  $T > T_1$  باشد و یا  $W < W_1$  باشد.

چنانچه در روش وسترگارد، شتاب زمین به صورت  $a_g = a g \cos(\omega t)$  فرض گردد، میتوان میزان فشار حداکثر را به ازای  $x=0$  و در زمانهای  $(t=0, T, 2T, \dots)$  بصورت زیر تعیین نمود:

$$P_{\max} = \frac{8\rho a r h g}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 c_n} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2h} \quad (9)$$

وسترگارد نشان داد که در شرایطی که  $h < 150\text{m}$  و  $T > \frac{4}{3} \text{sec}$  است میتوان  $P_{\max}$  را از رابطه تقریبی و ساده تر زیر تعیین نمود.

$$P_{\max} = \frac{7}{8} \text{arg} \sqrt{h(h-y)} \quad (10)$$

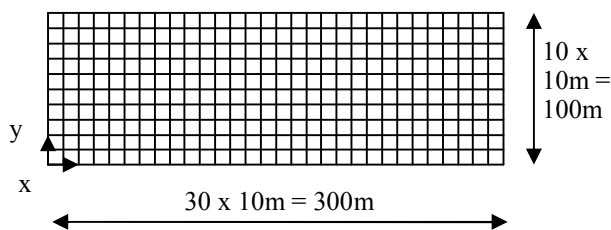
**۳- مقایسه جوابهای وسترگارد با استفاده از المانهای محدود**

برای مقایسه کردن جوابها وسترگارد با استفاده از المانهای محدود، سه حالت در نظر گرفته شد. در حالت اول یک مخزن آب در نظر گرفته شد که دیواره های اطراف آن کاملا صلب میباشند. در حالت دوم برای بررسی اثر انعطاف پذیری سدها، المانهای سد نیز به مدل اضافه گردید و یک طرف مخزن که به سد منتهی میشد دیگر حالت صلب نداشت. در حالت سوم سدهای قوسی به همراه دیواره های سنگی بصورت کامل مدل گردید تا جوابهای یک مسئله کاملا عملی با جوابهای وسترگارد مقایسه گردد. این سه حالت بترتیب در زیر بررسی شده اند.

**۳-۱- حالت اول: دورتادور آب کاملا صلب است و فقط آب مدل میگردد.**

این حالت کاملا شبیه به فرضیات وسترگارد میباشد و شروط ۲ و ۳ ذکر شده در قسمت ۱ را اقلان میکند. سایر شروط ذکر شده نیز در هنگام مدلسازی رعایت میگردد. فقط شرط چهارم که طول مخزن را بینهایت در نظر میگیرد، بصورت طول مخزن معادل ۳ برابر ارتفاع مخزن در نظر گرفته میشود. این فرض بر اساس پیشنهاد مراجع [7] و [8] اعمال میگردد و در عمل هم نشان داده که فرض خوب و قابل قبولی است. مدل المان محدود مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شد و مورد بررسی قرار گرفت.

همانطور که شکل ۱ نشان میدهد، ارتفاع مخزن برابر با 100m میباشد که توسط 10 المان 10 متری مش بندی شده است. طول مخزن 300m گرفته شده است که سه برابر ارتفاع آن میباشد و باز هم توسط المانهای 10 متری مش بندی شده است. دیواره صلب سد در  $x=0$  در نظر گرفته شده است و در تمام اطراف آب دیواره های صلب قرار گرفته و در سطح آب فشار برابر صفر در نظر گرفته شده است. سرعت امواج برای آب برابر  $1440 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شد.



شکل ۱- مش بندی مخزن در حالت اول

پریودهای ارتعاش مخزن در جهت X محاسبه گردید و برای ۳ پریود اول مخزن مقادیر بدست آمده از المان محدود با مقادیر در نظر گرفته شده توسط وسترگارد در جدول ۱ مقایسه گردیده است.

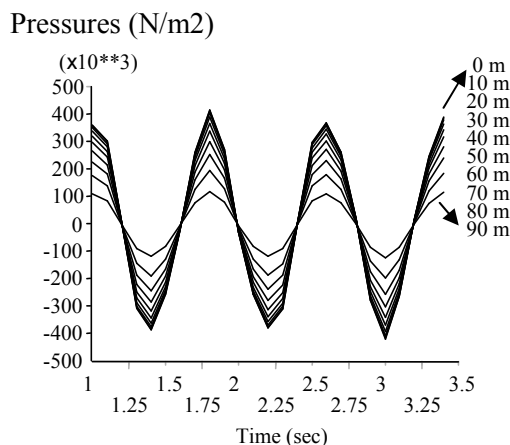
جدول ۱- مقایسه پریودهای ۳ مد اول ارتعاش برحسب ثابته بین روش وسترگارد و المانهای محدود برای مخزن شکل ۱

Mode Shape	1	2	3
Westergard	0.2778	0.0926	0.0556
Finite Element	0.2775	0.0917	0.0542

برای تعیین پریودها در جدول یک، در روش وسترگارد از فرمول ساده ۶ و در روش المانهای محدود از آنالیز مدال استفاده گردید. همانطور که این جدول نشان میدهد تشابه قابل توجهی بین نتایج، بویژه در مدهای اصلی اول وجود دارد. تفاوت جزئی بین دو روش میتواند ناشی از محدود بودن طول مخزن در روش المان محدود باشد.

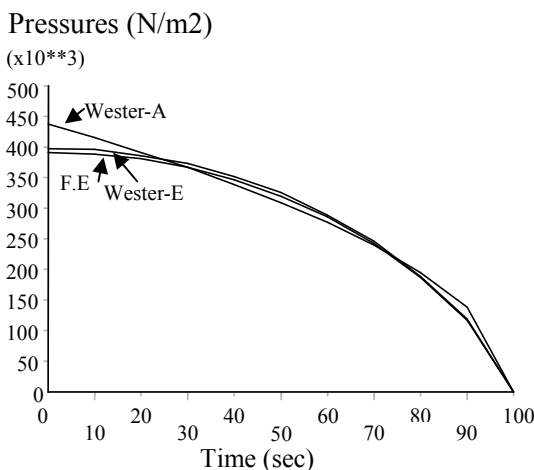
در مرحله بعدی مخزن تحت اثر شتاب هارمونیک در جهت X با پریود 0.8sec قرار گرفت. این پریود ارتعاش از اولین پریود ارتعاش مخزن بزرگتر بوده و بدین ترتیب تقریباً تمام شرایط حل وسترگارد تامین میگردد.

شکل ۲ نشان دهنده نحوه تغییرات فشار در ارتفاعات 0,10,20,30,40,50,60,70,80,90m نسبت بزمان در مخزن میباشد. همانطور که این شکل نشان میدهد تغییرات فشار در تمام این نقاط نیز بصورت هارمونیک و با پریود ارتعاشی مساوی با پریود بارگذاری میباشد. لازم بذکر است که در سطح مخزن که در تراز 100m واقع است مقدار فشار در تمام زمانها صفر بوده و بنابراین ترسیم نگردیده است.



شکل ۲- تغییرات فشار نسبت به زمان برای گره های با ارتفاعات مختلف در مخزن در حالت اول

همچنین شکل ۳ جواب روش المان محدود را با وسترگارد مقایسه مینماید. رابطه وسترگارد به دو شکل دقیق و تقریبی بررسی گردید. شکل دقیق رابطه وسترگارد با استفاده از معادله ۹ بدست آمده است و در اشکال با علامت Wester-E نشان داده شده است و شکل تقریبی وسترگارد با استفاده از معادله ۱۰ بدست آمده است و در اشکال با علامت Wester-A نشان داده شده است و نتایج المانهای محدود نیز با علامت F.E نشان داده شده اند. همانطور که این شکل نشان میدهد آنالیز المانهای محدود تقریباً با رابطه وسترگارد دقیق مطابق است و تفاوت جزئی با وسترگارد تقریبی دارد. تفاوت بسیار ناچیز بین المانهای محدود و وسترگارد دقیق میتواند ناشی از مدل کردن محدود طول مخزن در مدل المان محدود باشد.



شکل ۳- مقایسه ماگزیمم فشارهای بدست آمده از روش وسترگارد و المان محدود در حالت اول

تحلیل مشابه فوق برای مخازن با ارتفاعات 20,40,60,80,120,140m نیز صورت گرفت و در تمام آنها نیز نتایج مشابه با مخزن با ارتفاع 100m بود. برای نشان دادن نتایج این ارتفاعات مخازن نیاز به شکل ۳ برای هر ارتفاع بود که برای خلاصه شدن مطلب آورده نشده اند. در تمام این مخازن پریود ارتعاش 0.8sec بزرگتر از پریود اولین مود ارتعاشی آنها بود. اگر پریود ارتعاشات بتدریج به پریود اولین مود ارتعاشی نزدیک میگشت، جوابها نسبت به زمان تغییر میافت و دیگر حالت هارمونیک نداشت.

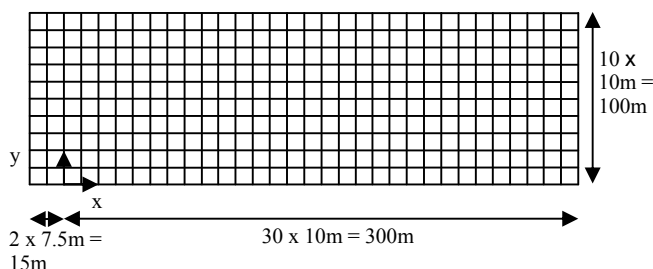
همچنین بنظر میرسید فرض فشار برابر صفر در کل سطح در تراز  $y=100m$  صحیح نباشد و باید به آب اجازه حرکت کردن قائم در سطح داده شود. برای کنترل این مسئله فشار در سطح مخزن فقط در نقطه وسط مخزن برابر صفر داده شد و به سطح مخزن اجازه داده شد که در جهت ارتفاع تغییر مکان داشته باشد. جوابهای بدست آمده از روش المان محدود دقیقاً مشابه شکلهای ۲ و ۳ بدست آمد که بدین ترتیب میتوان دریافت که هر دو شکل دارای جوابهای یکسان میباشند. به این معنی که روش اول که سطح آب را در مقابل حرکات عمودی میبندد و فشار را در کل سطح برابر صفر میگیرد با



روش دوم که فقط فشار را در سطح مخزن در نقطه وسط برابر صفر میگیرد و اجازه حرکت به سطح از لحاظ عمودی را میدهد با هم مشابه اند و هر دو یک جواب میدهند.

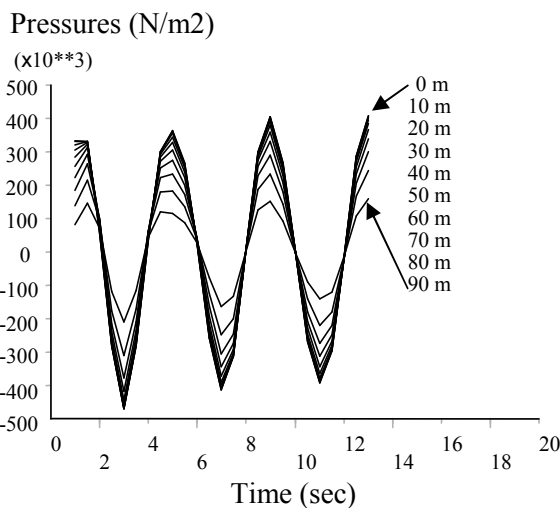
### ۳-۲- حالت دوم: شبیه به حالت اول میباشد و فقط دیواره سد نیز بصورت گیردار مدل میگردد.

در حالت دوم، کمی نسبت به شرایط وسترگارد تغییر ایجاد میشود، به این شکل که دیواره سد نیز مدل میگردد و دیگر دیواره بصورت صلب نمیشود. شکل ۴ نشان دهنده مدل مخزن و دیواره سد میباشد. همانطور که شکل ۴ نشان میدهد، مش بندی مخزن سد عینا مانند حالت قبل است و فقط از دو مش بعرض 7.5m در هر لایه برای مدلسازی سد استفاده گردیده است که به این ترتیب کل ضخامت بدنه سد 15m در نظر گرفته شده است. سد در این مدل بصورت گیر دار شده به زمین در نظر گرفته شد تا حالت انعطاف پذیری سد بیشتر گردد و بهتر بتوان آن را با حالت سد صلب قیاس کرد.



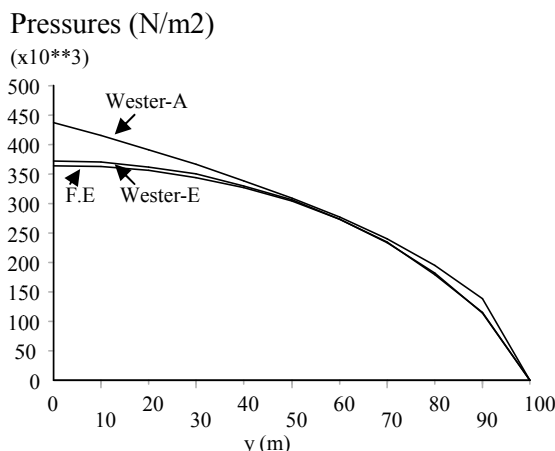
شکل ۴- مش بندی مخزن و سد در حالت دوم

در عمل در سدهای قوسی دیواره های سد نیز در کناره ها تکیه گاه دارند و سد بصورت صلبتر عمل مینماید. این مدل مورد آنالیز مودال قرار گرفت و مشخص گردید که مود اول ارتعاشی مخزن دارای پریود 1.8sec میباشد بنابراین مدل تحت تاثیر پریود تحركات 4sec قرار گرفت تا بدین ترتیب پریود تحریکات از پریود مد اول بیشتر باشد. شکل ۵ نشان دهنده نحوه تغییرات فشار در ارتفاعات مختلف پشت سد نسبت به زمان میباشد.



شکل ۵- تغییرات فشار نسبت به زمان برای گره های با ارتفاع مختلف در مخزن در حالت دوم

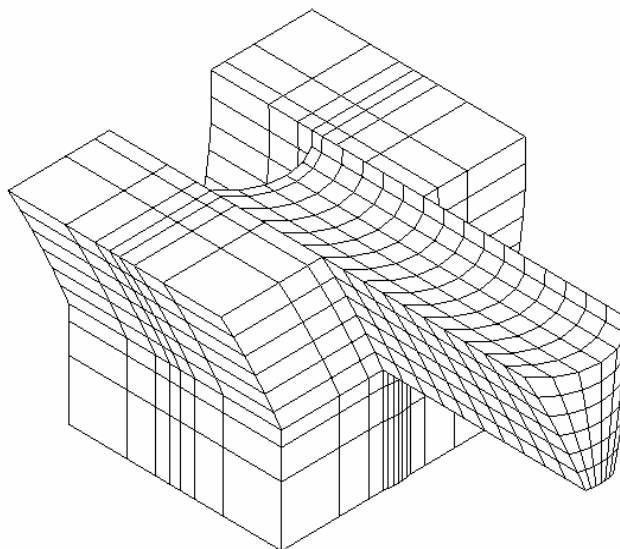
همانطور که شکل ۵ نشان میدهد باز هم تغییرات فشار در نقاط مختلف به صورت هارمونیک و با همان پریود ارتعاش تغییر مینماید. همچنین شکل ۶ مقایسه بین روش وسترگارد و المان محدود را بنمایش میگذارد، که در اینجا نیز تطابق خوبی بین رابطه وسترگارد دقیق و المانهای محدود موجود است. این اشکال نشان میدهند که حتی اگر دیواره سد صلب نباشد، با قرار گرفتن مدل تحت اثر پریود ارتعاشی بیش از مد اول، باز همان جوابهای وسترگارد به جوابهای اصلی نزدیک میباشدند.



شکل ۶- مقایسه ماکزیمم فشارهای بدست از روش وسترگارد و المانهای محدود در حالت دوم

### ۳-۳- حالت سوم: سد و پی های اطراف سد بصورت کامل مدل میگردد.

این حالت میتواند نشان دهنده یک سد واقعی با شرایط عملی باشد. در این مدل از یک سد قوسی استفاده شده است و باز هم میخواهیم مقایسه ای بین جوابهای وسترگارد و مدل المان محدود بعمل آوریم. شکل ۷ نشان دهنده مدل المان محدود مورد استفاده برای یک سد قوسی با ارتفاع 100m میباشد و دیواره های سنگی اطراف سد نیز در مدل داده شده اند تا شرایط تا حد ممکن به واقعیت نزدیک گردد.

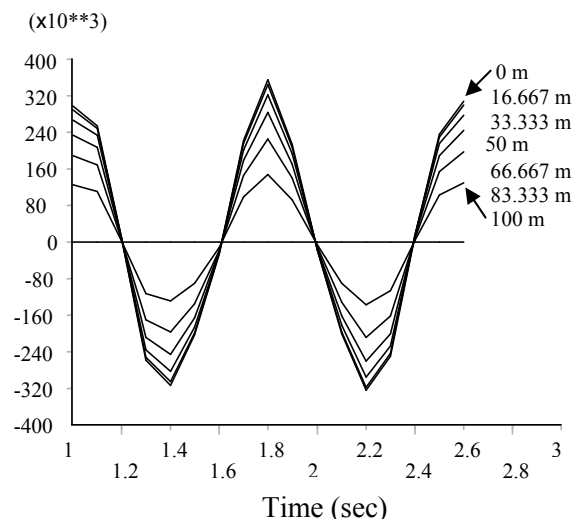


شکل ۷- مش بندی سد، مخزن و دیواره های سنگی اطراف در حالت سوم

در روی شکل اولین لایه مش در محل سد مربوط به بدنه سد میباشد و سایر مش ها مربوط به مدلسازی مخزن میباشد. در محیط بیرونی پی، تغییر مکانها در هر سه جهت بسته شده اند. در روی سطح آب فشار برابر صفر در نظر گرفته شده است. طول مخزن آب سه برابر ارتفاع سد یعنی برابر با 300m در نظر گرفته شده است. طول تاج سد 100m و ضخامت آن 10m در نظر گرفته شده است. ضخامتی از دیواره های سنگی معادل با ارتفاع سد از هر طرف از سد مدل گردیده است که به توصیه مرجع [7] میباشد. این سد با شرایط ذکر شده تحت آنالیز مدال قرار گرفت و مشخص شد که اولین مود ارتعاش آن در جهت عمود بر سد برابر 0.235sec میباشد. بنابراین باز هم مدل تحت اثر تحریکات با پریود 0.8sec قرار گرفت که از پریود مد اول بزرگتر است. شکل ۸ نشان دهنده نحوه تغییرات فشار پشت سد در ارتفاعات مختلف نسبت به زمان میباشد. باز هم در اینجا تغییرات به صورت هارمونیک و برابر با پریود تحریکات میباشد. همچنین شکل ۹ نشان دهنده مقایسه بین روش وسترگارد با روش المانهای محدود میباشد، که در این شکل نیز تطابق نسبتاً خوبی بین روش وسترگارد و المان محدود دیده می شود.

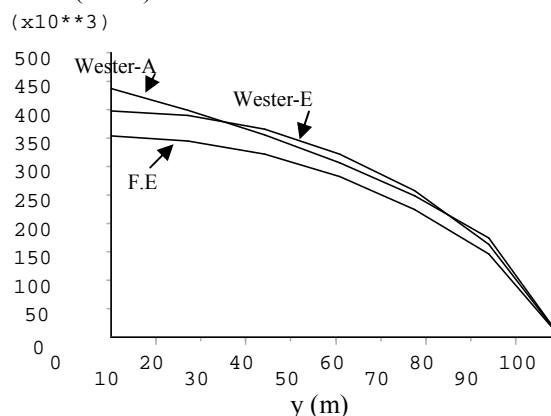


### Pressures



شکل ۸- تغییرات فشار نسبت به زمان برای گره های با ارتفاع مختلف در پشت سد برای حالت سوم

### Pressures (N/m<sup>2</sup>)



شکل ۹- مقایسه ماگزیم فشارهای بدست آمده از روش وسترگارد و المانهای محدود در حالت سوم

#### ۴- نتیجه گیری:

نتایج مقایسه در حالت اول تشابه بسیار زیادی را نشان میدهد و میتوان گفت که نتایج وسترگارد با نتایج المان محدود برای پریود تحریکات بیش از مد اول یکسان میباشد. نتایج تقریباً یکسان است و اگر تفاوت بسیار جزئی وجود دارد ناشی از بینهایت نبودن طول مخزن در مدل المان محدود میباشد. در حالت دوم نتایج تشابه خوبی نشان میدهد، و باز هم اثبات میکند مهمترین عامل در نزدیکی نتایج بیشتر بودن پریود تحریکات از پریود مد اول است. بنابر این فرض صلب بودن دیواره سد در مدل وسترگارد مقید کننده بزرگی نیست و حتی برای یک سد که به صورت گیردار به زمین متصل شده و انعطاف پذیری زیادی در ارتفاع دارد نتایج به هم نزدیک است. در حالت سوم نیز تشابه بین نتایج قابل توجه میباشد و مجدداً نشان دهنده اهمیت پریود تحریکات در مقابل مد اول سازه میباشد و نشان میدهد شروط اول تا چهارم وسترگارد اگرچه در نتایج تاثیر میگذارند ولی تاثیر آنها در مقابل مسئله پریود بسیار ناچیز میباشد. بنابراین برای سدهای کوتاه که پریود ارتعاش مد اول آنها از پریود ارتعاشات زلزله کمتر است، نتایج وسترگارد بسیار مشابه نتایج المانهای محدود میباشد و نیازی به صرف وقت و سعی زیاد برای مدل کردن آب و تاثیر آن بر سد نمیشود.

#### قدر دانی:

این پژوهش با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام گرفته است.



1. Westergaard, H.M., (1933) "Water pressures on dams during earthquakes",. *Transactions, ASCE*, Vol.98, PP.418-433
2. Zangar, C.N. and Haefeli, R.J., (1952) "Electric analog indicates effect of horizontal earthquake shocks on dams", *Journal of the engineering mechanics division*, Vol.22, No. 4
3. Hatano, T., "An examination of the resonance of hydrodynamic pressure during earthquakes due to compressibility of water", *Technical report C-65001, central research institute of electric power industry, Tokyo, Japan*, (1965)
4. Chopra, A.K., (1967) "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes", *Journal of the engineering mechanics division, ASCE*, Vol.93, PP.205-223
5. Zienkiewicz, O., (1964) "Hydrodynamic pressure due to earthquakes", *Water Power*, Vol.6, PP.382-388
6. Sharan, S.K., (1985) "Finite element modeling of infinite reservoirs", *Journal of engineering mechanics*, Vol.111
7. Federal Energy Regulatory Commission, (1999) "Arch Dams", PP.174
8. U.S. Army Corps of Engineers, (1994) "Arch Dam Design", *Engineer Manual EM1110-2-2201*, PP.239