



## بررسی ناحیه پلاستیک در ترک‌های موجود در سازه‌های فلزی

مجیدرضا آیت‌اللهی<sup>۱</sup>، کارو صدیقیانی<sup>۲</sup>

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت، نارمک، تهران  
Karo\_sedighiani@mecheng.iust.ac.ir

### خلاصه

بدلیل تمرکز تنش شدید در نوک ترک و رفتار تغییر فرم پذیر فلزات، در اطراف ترک‌های موجود در سازه‌های فلزی یک ناحیه پلاستیک تشکیل می‌گردد که شکل و اندازه آن می‌تواند اثر قابل ملاحظه‌ای روی رفتار شکست قطعه داشته باشد. یکی از پارامترهای مهم و اثرگذار بر رفتار ترک، ترم ثابت تنش، موسوم به تنش  $T$  می‌باشد. بنابراین در این مقاله بطور خاص، اثر تنش  $T$  بر شکل و اندازه ناحیه پلاستیک در بارگذاری‌های مد  $I$  و مد  $II$  بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد، که تنش  $T$  اثر قابل ملاحظه‌ای روی شکل و اندازه ناحیه پلاستیک دارد.

کلمات کلیدی: ناحیه پلاستیک، تنش  $T$ ، بی بعدسازی، بارگذاری مد  $I$ ، بارگذاری مد  $II$

### مقدمه

در سازه‌های فلزی بعضاً ترک‌هایی در مرحله ساخت و یا به دلیل عیب‌های موجود، بتدریج در طول دوره کاری سازه ایجاد می‌شود. به عنوان مثال در پل‌های فلزی، پوسته‌های جدار نازک مورد استفاده در مخازن تحت فشار، دکل‌های برق و بسیاری از دیگر سازه‌های مهندسی که تحت بارهای تکرار شونده مانند حرکت وسایل نقلیه، زیاد و کم شدن فشار داخل مخزن و جریان باد قرار می‌گیرند، بر اثر بارهای خستگی ترک‌هایی در نواحی تمرکز تنش تشکیل می‌شود، که سبب کاهش استحکام سازه می‌گردد. گریفیث (Griffith) [۱] اولین کسی بود که برای توضیح تفاوت میان مقادیر تئوری و مشاهده شده استحکام قطعات، فرض کرد در قطعات ترک‌های بسیار ریزی وجود دارد، و این ترک‌ها سبب کاهش استحکام سازه می‌شوند. ارزیابی استحکام سازه‌های ترک‌دار به کمک مکانیک شکست صورت می‌گیرد. بدین منظور لازم است که تنش‌های اطراف ترک استخراج شده و رفتار ماده در اطراف نوک ترک به دقت بررسی شود. به دلیل تمرکز تنش شدید در نوک ترک و رفتار تغییر شکل پذیر فلزات، همواره در اطراف ترک‌های موجود در سازه‌های فلزی یک ناحیه پلاستیک تشکیل می‌گردد که شکل و اندازه آن می‌تواند اثر قابل ملاحظه‌ای روی رفتار شکست قطعه و مکانیزم رشد ترک داشته باشد. خان (Khan) و خرایشه (Khraisheh) [۲] معیاری پیشنهاد کردند که در آن با استفاده از شکل ناحیه پلاستیک می‌توان مسیر گسترش ترک را پیش‌بینی کرد. تلاش‌ها همچنین نشان می‌دهد، اگر اندازه ناحیه پلاستیک در مقایسه با دیگر پارامترهای ترک کوچک باشد (مانند طول ترک)، می‌توان از تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی برای تحلیل میدان‌های تنش اطراف نوک ترک استفاده کرد، و شرایط (small scale) yielding) حاکم خواهد بود.

با استفاده از تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی، تنش‌های موجود در اطراف ترک توسط یک بسط با بی‌نهایت ترم نشان داده می‌شود، که به بسط ویلیامز (Williams) شناخته می‌شود [۳]:

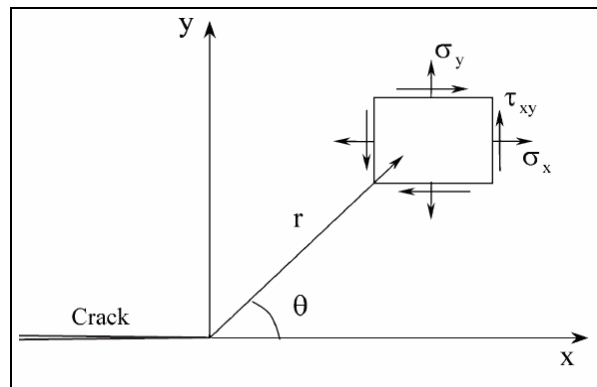
$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right] + T + o(r^{1/2}) \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + o(r^{1/2}) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] + o(r^{1/2})\end{aligned}\quad (1)$$

در روابط فوق  $r$  و  $\theta$  مختصات قطبی بوده و مبدأ آن بر نوک ترک واقع شده است (شکل ۱).  $K_I$  و  $K_{II}$  ضرایب شدت تنش مد  $I$  و مد  $II$  و ترم ثابت تنش می‌باشد. جملات  $o(r^{1/2})$  ترم‌های با توان‌های بالاتر  $r$  است. ترم اول معادلات بالا سینگولار بوده و در نزدیکی نوک ترک ترم غالب تنش می‌باشد، به همین دلیل معمولاً از اثرات ترم‌های بعدی صرف‌نظر می‌شود. تحقیقات اخیر نشان می‌دهد که ترم ثابت تنش نیز می‌تواند نقش مهمی در رفتار ترک

<sup>۱</sup> استاد

<sup>۲</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد

ایفا کند. لارسون (Larsson) و کارلسون (Carlsson) [۴] مشاهده کردند، میدان‌های تنش نوک ترک در بعضی از نمونه‌ها تا حدودی متفاوت با نتایج بدست آمده از مدل لایه مرزی (Boundary layer model) می‌باشد. سپس آنها با در نظر گرفتن اثر ترم دوم بسط ویلیامز نتایج بهتری برای تنش‌ها بدست آوردند. رایس (Rice) [۵] نشان داد که  $K_I$  به تنهایی برای توصیف میدان تنش نوک ترک کافی نیست. بیلبی (Bilby) و همکارانش [۶] بیان کردند که در مواد غیر سخت‌شونده در صورتیکه علاوه بر  $K_I$  اثر ترم  $T$  نیز در نظر گرفته شود، می‌توان میدان الاستیک پلاستیک نوک ترک را بهتر پیش‌بینی کرد. کوترل (Cottrell) و رایس [۷] نیز نشان دادند که مقدار تنش  $T$  و علامت آن، می‌تواند نقش مهمی در مسیر و جهت رشد ترک ایفا کند. اثر تنش  $T$  محدود به بارگذاری مد  $I$  نمی‌گردد. تحقیقات عددی صورت گرفته نشان می‌دهد، تنش  $T$  در مسئله‌های مد  $II$  نیز وجود دارد و نادیده گرفتن آن می‌تواند سبب ایجاد خطاهایی در پیش‌بینی رفتار شکست شود [۸، ۹، ۱۰].



شکل ۱- تنش‌ها در نوک ترک

از آنجاییکه فرایند شکست از نوک ترک شکل می‌گیرد، بررسی رفتار ماده در نزدیکی نوک ترک بسیار مهم است. تلاش‌های بسیاری صرف بررسی ناحیه پلاستیک اطراف نوک ترک شده است، هرچند که در بیشتر آن‌ها [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴] اثر ترم  $T$  صرف‌نظر شده است. بتگون (Betegon) [۱۵] و شیه (Shih) [۱۶] مشاهده کردند که تنش  $T$  اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر ناحیه پلاستیک دارد. کیم (Kim) و همکارانش [۱۷] و یوان (Yuan) [۱۸] اثر تنش  $T$  روی شکل و اندازه ناحیه پلاستیک، برای حالت‌های تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای را در ترک مد  $I$  بررسی کردند و نشان دادند که برای تعیین ناحیه پلاستیک لازم است اثر تنش  $T$  نیز در نظر گرفته شود. برای مد  $II$  نیز آیت‌اللهی و همکارانش [۱۹] اثر تنش  $T$  بر ناحیه پلاستیک را مورد بررسی قرار داده و مشاهده کردند که تنش  $T$  بر شکل و اندازه ناحیه پلاستیک و همچنین تنش‌های اطراف نوک ترک اثرگذار است. بنابراین نادیده گرفتن اثر تنش  $T$  می‌تواند سبب ایجاد خطاهایی در بررسی رفتار شکست قطعه گردد.

تمامی نتایج بدست آمده از کارهای پیشین بر اساس روش‌های عددی بوده و متأسفانه حل تحلیلی دقیقی برای مسئله موجود نمی‌باشد. هدف اصلی از این تحقیق، به دست آوردن یک شعاع بی‌بعد برای ناحیه پلاستیک اطراف ترک در بارگذاری مد  $I$  و مد  $II$  می‌باشد، که در آن اثر تنش  $T$  نیز لحاظ شده باشد. در این مقاله شعاع بی‌بعد ناحیه پلاستیک در حالت تنش صفحه‌ای و با استفاده از تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی بدست آمده و از معیار تسلیم ون‌میزر برای محدود کردن تنش‌ها استفاده شده است. نتایج برای مقادیر مختلف تنش  $T$  بررسی شد و مشاهده گردید که ترم  $T$  بطور قابل‌ملاحظه‌ای بر شکل و اندازه ناحیه پلاستیک اطراف نوک ترک تاثیرگذار است.

### بی‌بعدسازی ناحیه پلاستیک

در یک ماده ایزوتروپیک و برای حالت تنش صفحه‌ای، میدان تنش الاستیک اطراف نوک ترک را بر حسب دو ترم اول بسط ویلیامز می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_i f_{i1}(\theta) + T \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_i f_{i2}(\theta) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_i f_{i3}(\theta)\end{aligned}\quad i = I \text{ or } II \quad (2)$$

که در آن  $K_i$  ضریب شدت تنش برای بارگذاری مورد نظر است.  $f_{i1}(\theta)$ ،  $f_{i2}(\theta)$  و  $f_{i3}(\theta)$  نیز توابعی کلی از  $\theta$  بوده و برای بارگذاری مد  $I$  و مد  $II$  به ترتیب بصورت رابطه‌های (۳) و (۴) تعریف می‌شوند. برای مد  $I$ :



$$f_{I1}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3)$$

$$f_{I2}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$f_{I3}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

و برای مد II:

$$f_{II1}(\theta) = -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$f_{II2}(\theta) = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (4)$$

$$f_{II3}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

در این مقاله از معیار تسلیم ون میزور برای تعریف شعاع متغیر ناحیه پلاستیک استفاده می‌شود.

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_{ys}^2 \quad (5)$$

که در آن  $\sigma_{ys}$  تنش تسلیم ماده است. با جایگذاری معادله (۲) در معیار ون میزور، می‌توان رابطه دقیقی را برای شعاع ناحیه پلاستیک ( $r_p$ ) بدست آورد. اما رابطه بدست آمده به دلیل حضور  $K_I$  و  $K_{II}$  وابسته به هندسه مدل و شرایط بارگذاری قطعه خواهد بود. برای آنکه یک شعاع عمومی برای ناحیه پلاستیک بدست آید، بطوریکه برای تمامی شرایط بارگذاری و هندسه‌های مختلف کاربردپذیر باشد، لازم است، شعاع ناحیه پلاستیک نرمالیزه گردد. بروک (Broek) [۱۳] و اندرسون (Anderson) [۱۴] یک شعاع بی‌بعد برای ناحیه پلاستیک در بارگذاری‌های مد I خالص و مد II خالص بدست آوردند. اما آن‌ها در تحلیل خود، فقط ترم سینگولار تنش در بسط ویلیامز را لحاظ کردند و برای بی‌بعدسازی شعاع ناحیه پلاستیک از ضریب شدت تنش استفاده نمودند. برای مثال در حالت تنش صفحه‌ای و برای بارگذاری مد I، شعاع بی‌بعد بدست آمده بصورت زیر می‌باشد:

$$R_p(\theta) = \frac{r_p}{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right) \quad (6)$$

که در آن  $R_p$  شعاع نرمالیزه ناحیه پلاستیک و  $r_p$  شعاع ناحیه پلاستیک است. در بارگذاری مد I خالص و یا مد II خالص در صورتیکه فقط ترم سینگولار بسط تنش در نظر گرفته شود، در روابط تنها یکی از ضرایب شدت تنش  $K_I$  و یا  $K_{II}$  وجود خواهد داشت. بنابراین از آن می‌توان برای بی‌بعدسازی شعاع ناحیه پلاستیک استفاده کرد. اما در صورتیکه اثر ترم ثابت تنش نیز در نظر گرفته شود، علاوه بر  $K_I$  و یا  $K_{II}$ ، ترم  $T$  نیز در روابط ظاهر خواهد شد. بنابراین برای تعریف یک شعاع بی‌بعد و صحیح، لازم است که روشی مناسب برای بی‌بعدسازی شعاع ناحیه پلاستیک ارائه گردد، که در آن اثر تنش  $T$  نیز لحاظ شده باشد. اگر معادلات میدان تنش، رابطه (۲)، را در معیار ون میزور جایگذاری نموده و ساده‌سازی‌ها را بصورت مناسبی انجام دهیم به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right)^2 F(\theta) + \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) T G(\theta) + T^2 = \sigma_{ys}^2 \quad (7)$$

که  $F(\theta)$  و  $G(\theta)$  بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} F(\theta) = f_1^2(\theta) + f_2^2(\theta) + 3f_3^2(\theta) - f_1(\theta)f_2(\theta) \\ G(\theta) = 2f_1(\theta) - f_2(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

در صورتیکه در رابطه (۶)، پارامترهای بدون بعد  $z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{T}$  و  $b = \frac{T}{\sigma_{ys}}$  را جایگذاری کرده و روابط را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$z^2 F(\theta) + z G(\theta) + \left( 1 - \frac{1}{b^2} \right) = 0 \quad (9)$$

از حل معادله بالا برای  $z$  بدست می‌آید:

$$z = \frac{-G(\theta) \pm \sqrt{G^2(\theta) - 4F(\theta)(1 - 1/b^2)}}{2F(\theta)} \quad (10)$$

در صورت کسر رابطه (۱۰)، علامت مثبت مربوط به مقادیر مثبت تنش  $T$  و علامت منفی مربوط به مقادیر منفی تنش  $T$  می‌باشد. بنابراین شعاع بی‌بعد ناحیه پلاستیک ( $R_p$ ) بصورت زیر خواهد شد:



$$R_{p_i} = \frac{r_p}{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2} = \left( \frac{b}{z} \right)^2 \quad (11)$$

در رابطه بدست آمده برای  $z$ ،  $F(\theta)$  و  $G(\theta)$  برای بارگذاری‌های مد I و مد II بصورت زیر تعریف می‌شوند. برای مد I:

$$\begin{cases} F(\theta) = -\frac{1}{2} \cos^2 \theta (-5 + 3 \cos \theta) \\ G(\theta) = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} (2 - 3 \cos \theta + 3 \cos 2\theta) \end{cases} \quad (12)$$

و برای مد II:

$$\begin{cases} F(\theta) = \frac{1}{8} (19 - 4 \cos \theta + 9 \cos 2\theta) \\ G(\theta) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} (8 + 3 \cos \theta + 3 \cos 2\theta) \end{cases} \quad (13)$$

در رابطه (۱۱) یک شعاع نرمالیزه برای ناحیه پلاستیک بدست آمد. با ترکیب رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) با رابطه (۱۰) و جایگذاری آن در رابطه (۱۱) می‌توان شعاع بی‌بعد ناحیه پلاستیک را به ترتیب برای بارگذاری‌های مد I و مد II بدست آورد. برای مد I:

$$R_{p_i} = \frac{r_p}{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2} = \frac{16b^2 \cos^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) (5 - 3 \cos \theta)^2}{\left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \pm 2 \left( \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) (-8(-1+b^2)(-5+3 \cos \theta) + (2-3 \cos \theta + 3 \cos^2(2\theta))^2) \right)^{0.5} + 3 \cos \left( \frac{5\theta}{2} \right) \right)^2} \quad (14)$$

و برای مد II:

$$R_{p_{ii}} = \frac{r_p}{\frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2} = \frac{b^2 (19 - 4 \cos \theta + 9 \cos(2\theta))^2}{\left( 13 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \pm 2 \left( 2(-1+b^2)(19 - 4 \cos \theta + 9 \cos(2\theta)) + (8 + 3 \cos \theta + 3 \cos(2\theta))^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)^{0.5} + 3 \sin \left( \frac{5\theta}{2} \right) \right)^2} \quad (15)$$

شعاع بی‌بعد بدست آمده برای ناحیه پلاستیک تابعی از دو پارامتر زاویه  $\theta$  و نسبت بی‌بعد  $b$  می‌باشد. شعاع ناحیه پلاستیک نیز تابعی از دو پارامتر خواهد بود: نصف طول ترک ( $a$ ) و نسبت ضریب شدت تنش به تنش تسلیم  $\left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)$ . بطوریکه اگر طول ترک افزایش یابد، اندازه ناحیه پلاستیک نیز افزایش خواهد یافت. برای یک مقدار ثابت طول ترک نیز، اندازه ناحیه پلاستیک دارای تناسبی مستقیم با توان دوم نسبت  $\left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)$  می‌باشد. روابط

بدست آمده کلی بوده و برای تمامی شرایط بارگذاری و هندسه‌های مختلف صادق می‌باشد.

### بحث بر روی نتایج

در قسمت پیشین مقاله، روابطی برای شعاع نرمالیزه ناحیه پلاستیک بدست آمد. در ادامه با استفاده از روابط بدست آمده، اثر تنش  $T$  بر ناحیه پلاستیک را بررسی می‌کنیم. برای تحقیق اثر تنش  $T$  بر شکل و اندازه ناحیه پلاستیک سه دسته تحلیل ( $T > 0$ ،  $T = 0$  و  $T < 0$ )، برای هر کدام از ترک‌های مد I و مد II انجام شده است. از آنجاییکه برای  $\left| \frac{T}{\sigma_{ys}} \right| > 0.7$  ناحیه پلاستیک به مرزهای دور گسترش می‌یابد، بنابراین نتایج بدست آمده در این مقاله مربوط

به محدوده  $\left| \frac{T}{\sigma_{ys}} \right| < 0.7$  می‌باشد. در این محدوده می‌توان دامنه وسیعی از قطعات ترک‌دار واقعی را شبیه‌سازی کرد. تحلیل‌ها برای مقادیر

$$T/\sigma_{ys} = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \pm 0.33, \pm 0.5, \pm 0.57, \pm 0.67$$

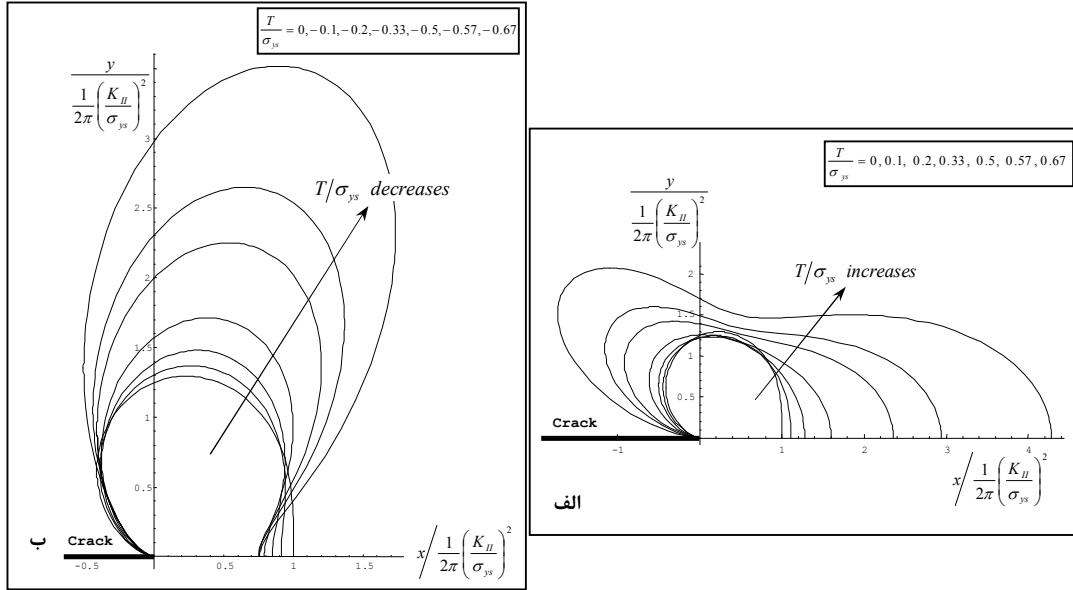
### بارگذاری مد I

شکل ۲، ناحیه پلاستیک نرمالیزه شده با استفاده از  $\frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2$ ، برای مقادیر مختلف  $T$  و در حالت بارگذاری مد I را نشان می‌دهد. مشابه تحقیقات

قبلی، در این حالت شکل ناحیه پلاستیک نسبت به محور ترک متقارن است. بنابراین بررسی‌های خود را به ناحیه پلاستیک بالای محور ترک، محدود می‌کنیم. ناحیه پلاستیک برای مقادیر مثبت تنش  $T$  و مقادیر منفی تنش  $T$ ، به ترتیب در شکل‌های ۲-الف و ۲-ب نشان داده شده است. مشاهده می‌شود تنش  $T$  اثر قابل ملاحظه‌ای روی شکل و اندازه ناحیه پلاستیک می‌گذارد. همانطور که از شکل ۲-الف مشخص است، با افزایش مقادیر مثبت تنش

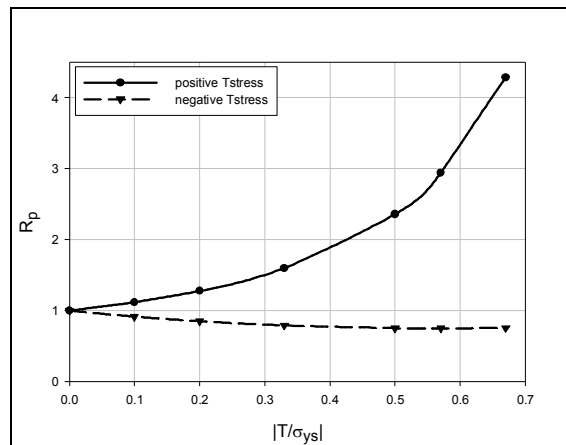


T، ناحیه پلاستیک جلوی نوک ترک بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگ می‌شود. همچنین افزایش مقادیر مثبت تنش T، سبب می‌شود ناحیه پلاستیک به نواحی پشت ترک گسترش یابد. شکل ۲-ب نشان می‌دهد که کاهش مقادیر منفی تنش T، باعث افزایش چشم‌گیر ارتفاع ناحیه پلاستیک می‌گردد. این رفتارها مشابه با نتایجی است که پیش‌تر کیم (Kim) و همکارانش [۱۷] با استفاده از روش‌های عددی بدست آوردند.

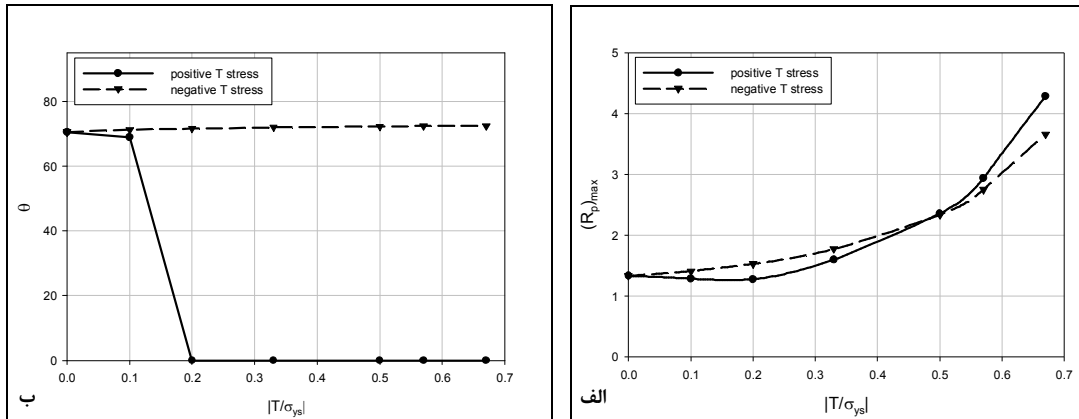


شکل ۲- اثر تنش T بر ناحیه پلاستیک در بارگذاری مد I  
الف- اثر مقادیر مثبت تنش T، ب- اثر مقادیر منفی تنش T

از پارامترهای مهم در بررسی ناحیه پلاستیک، شعاع این ناحیه در امتداد محور ترک ( $\theta=0$ ) می‌باشد. از شکل ۳ دیده می‌شود با افزایش مقادیر مثبت تنش T، شعاع ناحیه پلاستیک در امتداد محور ترک بطور قابل توجهی افزایش می‌یابد. درحالی‌که تنش T منفی اثر قابل توجهی بر این شعاع ندارد. از دیگر پارامترهای مهم، شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک می‌باشد. همانطور که از شکل الف-۴ مشاهده می‌شود، هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی تنش T، اثر قابل ملاحظه‌ای بر شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک می‌گذارند. بطوریکه با افزایش مقادیر مثبت تنش T و یا با کاهش مقادیر منفی تنش T، شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک افزایش چشم‌گیری خواهد یافت. زاویه متناظر با شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک در شکل ۴-ب نشان داده شده است. دیده می‌شود که تنش T مثبت سبب می‌گردد، شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک در امتداد محور ترک قرار گیرد. اما تنش T منفی اثر چندانی بر زاویه متناظر با شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک ندارد.



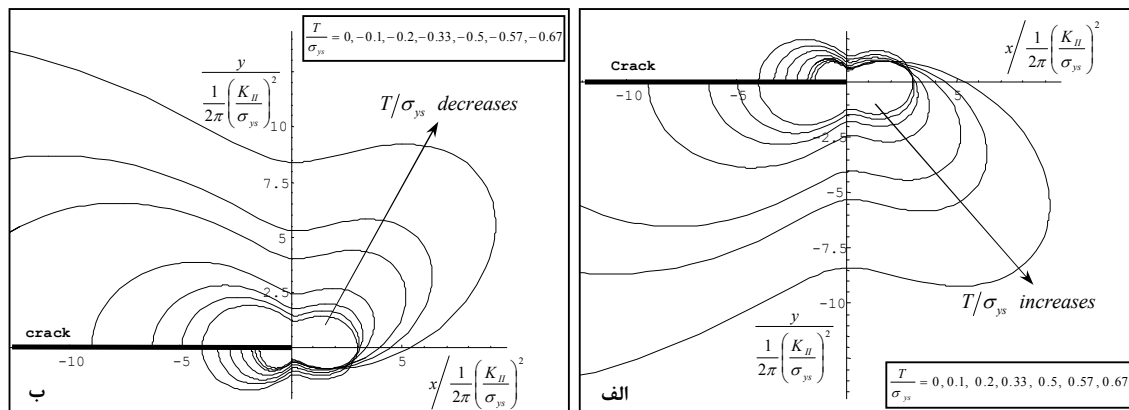
شکل ۳- اثر تنش T بر شعاع ناحیه پلاستیک در امتداد محور ترک ( $\theta=0$ )



شکل ۴- الف- اثر تنش T بر شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک  
ب- اثر تنش T بر زاویه متناظر با شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک (بر حسب درجه)

## بارگذاری مد II

شکل ۵، ناحیه پلاستیک نرمالیزه شده با استفاده از  $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{II}}{\sigma_{ys}}\right)^2$ ، برای مقادیر مختلف T و در حالت بارگذاری مد II را نشان می‌دهد. مشابه تحقیقات قبلی، ناحیه پلاستیک برای حالت  $T=0$ ، نسبت به محور ترک متقارن می‌باشد. درحالیکه تنش T، سبب می‌گردد ناحیه پلاستیک نسبت به محور ترک پادمقارن گردد. در شکل‌های ۵-الف و ۵-ب به ترتیب اثر مقادیر مثبت و منفی تنش T نشان داده شده است. مقایسه این دو شکل نشان می‌دهد، ناحیه پلاستیک متناظر با مقادیر مثبت و منفی تنش T، دارای بزرگی مشابه بوده ولی بصورت یک تصویر آینه‌ای حول محور ترک می‌باشد. لذا در این مقاله، ما فقط به بررسی اثر تنش T منفی بر شکل و اندازه ناحیه پلاستیک، در بارگذاری مد II می‌پردازیم. ناحیه پلاستیک از دو بخش اساسی تشکیل شده است: ناحیه پلاستیک جلوی نوک ترک و ناحیه پلاستیک پشت نوک ترک. تنش T بر هر دو بخش ناحیه پلاستیک اثرگذار است. همانطور که از شکل ۵-ب دیده می‌شود، مقادیر منفی تنش T سبب می‌شود، ناحیه پلاستیک جلوی نوک ترک بصورت پادساعت‌گرد دوران داشته باشد، که با کاهش مقادیر منفی تنش T دوران افزایش می‌یابد. مقادیر منفی تنش T بر ناحیه پلاستیک پشت نوک ترک نیز اثرگذار است. بطوریکه بخش پایینی ناحیه پلاستیک پشت نوک ترک، تحت تاثیر تنش T منفی منقبض شده و بخش بالایی آن بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. این رفتار مشابه با نتایج بدست آمده توسط آیت‌اللهی و همکارانش [۱۹] به کمک روش‌های عددی می‌باشد.

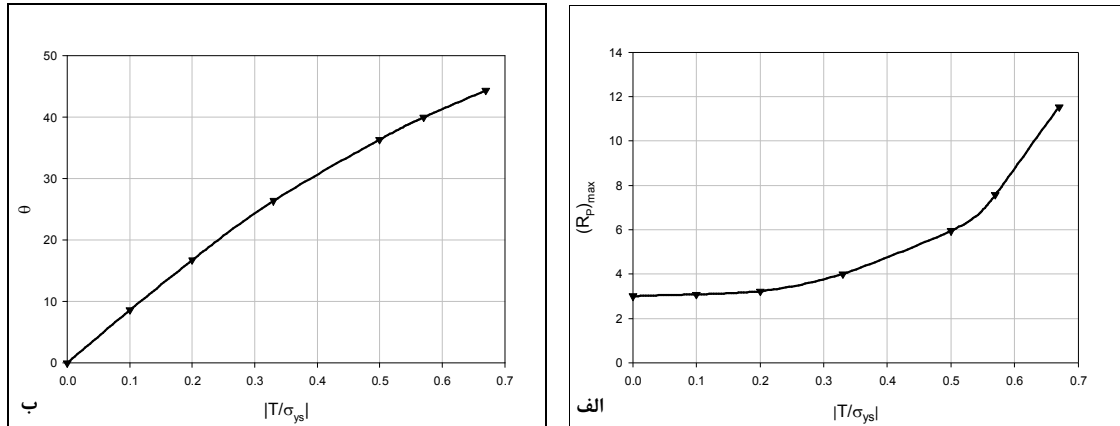


شکل ۵- الف- اثر تنش T بر ناحیه پلاستیک در بارگذاری مد II  
ب- اثر مقادیر مثبت تنش T، ب- اثر مقادیر منفی تنش T

همانطور که اشاره شد از پارامترهای مهم ناحیه پلاستیک، شعاع ماکزیمم این ناحیه می‌باشد. در شکل ۷-الف نمودار شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک به ازای مقادیر مختلف تنش T رسم شده است. مشاهده می‌شود که کاهش مقادیر منفی تنش T، باعث افزایش شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک می‌گردد.



شکل ۷-ب زاویه متناظر با شعاع ماکزیمم را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گردد که با کاهش تنش  $T$ ، زاویه متناظر با شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک افزایش می‌یابد، که نشان‌دهنده دوران پادساعت‌گرد ناحیه پلاستیک جلوی نوک ترک می‌باشد.



شکل ۶- الف- اثر تنش  $T$  بر شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک  
ب- اثر تنش  $T$  بر زاویه متناظر با شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک (بر حسب درجه)

### نتیجه‌گیری

در این تحقیق اثر تنش  $T$  روی شکل و اندازه ناحیه پلاستیک اطراف نوک ترک برای بارگذاری‌های مد I و مد II به صورت تحلیلی بررسی شد، و یک شعاع نرمالیزه برای ناحیه پلاستیک ارائه گردید. نتایج اصلی حاصل از این تحقیق عبارتند از:

۱- شعاع نرمالیزه بدست آمده عمومی بوده و مستقل از شرایط بارگذاری و هندسه مدل است. این فرمول‌بندی جدید به ما اجازه می‌دهد که مرزهای ناحیه پلاستیک را به سادگی تعریف کنیم.

۲- برای هر دو مد بارگذاری مشاهده شد که تنش  $T$  اثر قابل ملاحظه‌ای روی شکل و اندازه ناحیه پلاستیک دارد. بطوریکه با افزایش تنش  $T$  مثبت و یا با کاهش تنش  $T$  منفی، ناحیه پلاستیک اطراف ترک بطور قابل توجهی بزرگ‌تر خواهد شد. برای مثال در بارگذاری مد I و برای  $T/\sigma_{ys} = -0.57$  شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک حدود ۲ برابر حالت  $T=0$  است. همچنین در بارگذاری مد II و برای و برای همان نسبت  $T/\sigma_{ys} = -0.57$  شعاع ماکزیمم ناحیه پلاستیک حدود ۲/۵ برابر حالت  $T=0$  است.

۳- در بارگذاری مد I، مقادیر مثبت تنش  $T$ ، سبب افزایش چشمگیر شعاع ناحیه پلاستیک در امتداد محور ترک می‌گردد. تنش  $T$  مثبت سبب می‌شود ناحیه پلاستیک به قسمت‌های پشت ترک نیز گسترش یابد. همچنین مقادیر منفی تنش  $T$ ، بیشترین اثر را روی ارتفاع ناحیه پلاستیک می‌گذارد. بطوریکه افزایش چشم‌گیری در ارتفاع ناحیه پلاستیک مشاهده می‌گردد.

۴- در بارگذاری مد II، مقادیر منفی تنش  $T$  سبب دوران پادساعت‌گرد ناحیه پلاستیک جلوی نوک ترک می‌گردد. ناحیه پلاستیک پشت نوک ترک نیز تحت تاثیر تنش  $T$  می‌باشد، بطوریکه قسمت پایینی ناحیه پلاستیک پشت نوک ترک منقبض شده و قسمت بالایی آن بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. از سوی دیگر در بارگذاری مد II، ناحیه پلاستیک متناظر با مقادیر مثبت و منفی تنش  $T$ ، که دارای بزرگی مشابه باشند، بصورت یک تصویر آینه‌ای حول امتداد ترک می‌باشد.

۵- از مقایسه ناحیه پلاستیک بدست آمده برای بارگذاری مد I و مد II دیده می‌شود که ناحیه پلاستیک در بارگذاری مد II بطور قابل توجهی بزرگتر از ناحیه پلاستیک در بارگذاری مد I است.

### مراجع

- Griffith, A.A. (1920) The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions of Royal Society (London), **221**, 163-198.
- Khan, M.A. and Khraisheh, K. (2004) A new criterion for mixed mode fracture initiation based on the crack tip plastic core region. International Journal of Plasticity, **20**, 55-84.
- Williams, M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions insingular corners of plates inextension. J of Applied Mechanics, **19**, (3), 526-528.



4. Larsson, S.G. and Carlsson, A.J. (1973) Influence of non-singular stress and specimen geometry on small-scale yielding at each tip in elastic-plastic materials. *Journal of Physics and solids*, **21**, 263-277.
5. Rice, J.R. (1974) Limitations to the small scale yielding for crack-tip plasticity. *Journal of Mechanic of Physics and solids*, **22**, 17-26.
6. Bilby, B.A., Carden, G.E., Goldthorpe, M.R. and Howard, I.C. (1986) Size effect in fracture. (London) Mechanical Engineering Publications, 37-46.
7. Cotterell, B. and Rice, J.R. (1980) Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture*, **16**, 155-169.
8. Ayatollahi, M.R., Asadkarami, A. and Zakeri, M. (2005) Finite element evaluation of punch-type crack specimens. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **82**, 722-728.
9. Ayatollahi, M.R. and Aliha, M.R.M. (2007) Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading. *Computational Materials science*, **38**, (4), 660-670.
10. Ayatollahi, M.R. and Abbasi, H. (2001) Prediction of fracture using a strain based mechanism of crack growth. *Building Research Journal*, **43**, (3), 167-180.
11. Banks, T.M. and Garlick, A. (1984) The form of crack tip plastic zones. *Engineering Fracture Mechanics*, **19**, (3), 571-581.
12. Zhang, J.P. and Venugopalan, D. (1987) Effects of notch radius and anisotropy on the crack tip plastic zone. *Engineering Fracture Mechanics*, **26**, (6), 913-925.
13. Anderson, T.L. (1995) *Fracture mechanics: Fundamentals and applications*. Second ed., CRC Press.
14. Broek, D. (1982) *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers.
15. Betegon, C. and Hancock, J.W. (1991) Two-parameter characterization of elastic-plastic crack tip fields. *Journal of Applied Mechanics*, **58**, 104-110.
16. Fong-Shih, C., O'Dowd, P.N. and Kirt, M.T. (1993) A framework for quantifying crack tip constraint, *Constraint Effects in Fracture mechanics*, ASTM STP 1171, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 2-20.
17. Kim, Y., Zhu, X.K. and Chao, Y.J. (2001) Quantification of constraint on elastic plastic 3D crack front by the  $J-A_2$  three-term solution. *Engineering Fracture Mechanics*, **68**, 895-914.
18. Yuan, H. and Broeks, W. (1998) Quantification of constraint effects in elastic plastic crack front field. *J. Mech-Phys-solids*, **46**, (2), 219-241.
19. Ayatollahi, M.R., Pavier, M.J. and Smith, D.J. (2002) Crack-tip constraint in mode II deformation. *International Journal of fracture*, **113**, 153-173.