



## آنالیز محیط بینهایت دو ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت نیروی استاتیکی

عزیزالله اردشیر بهرستاقی<sup>۱</sup> و مرتضی اسکندری قادی<sup>۲</sup>

### خلاصه

در این مقاله فضای کامل ایزوتروپ جانبی شامل یک نیم فضای فوقانی و یک نیم فضای تحتانی توری در نظر گرفته می‌شود که محور ایزوتروپی آنها موازی هم بوده و عمود بر سطوح تماس آنها باشد. این مجموعه تحت اثر نیروی استاتیکی دلخواه که در عمق  $Z=S$  در نیم فضای تحتانی وارد شده مورد تحلیل قرار می‌گیرد. به منظور این تحلیل، معادلات تعادل استاتیکی به کمک توابع پتانسیل هو-نواکی-لخنیسکی به صورت مجزا درآمده و با استفاده از سری فوریه و تبدیل هنکل مسئله برای توابع پتانسیل حل می‌شود. جواب‌های بدست آمده در نیم فضاهای فوقانی و تحتانی چنان است که همگی آنها در بی نهایت به سمت صفر میل می‌کنند. با استفاده از روابط تغییر مکان-توابع پتانسیل نتایج برای تغییر مکان‌ها به صورت انتگرال‌های یک بعدی به دست آمده و به صورت عددی برآورد می‌گردند. نتایج بدست آمده برای فضای کامل تک‌ماده‌ای ایزوتروپ جانبی نیز ارائه می‌گردد.

**کلمات کلیدی:** فضای کامل ایزوتروپ جانبی، نیروی سطحی، نیروی مدفون، توابع پتانسیل، تغییر مکان.

### مقدمه

بسیاری از مصالح در طبیعت و نیز ساخته‌های مصنوعی رفتار ایزوتروپ جانبی دارند. از آنجمله می‌توان به رفتار اعضای مستقیماً برگرفته از تنه درختان، محیط خاکی زیر ساختمان‌ها و صفحات چند لایه نام برد. اهمیت بررسی پاسخ این مصالح از دیر باز مورد توجه بوده بطوری که میشل در سال ۱۹۰۰ میلادی به بررسی یک نیم فضای ایزوتروپ جانبی تحت نیروهای سطحی دلخواه پرداخته است [Michel, 1900]. لخنسکی در سال ۱۹۴۰ محیط ایزوتروپ جانبی را در حالت متقارن محوری و بدون پیچش در نظر گرفته و معادلات درگیر حاکم بر مسئله را با معرفی یک تابع پتانسیل به صورت مجزا و قابل حل در آورده است [Lekhnitskii, 1981]. نواکی تابع پتانسیل لخنسکی را مجدداً بدست آورده و ادعا کرده است که این جواب محدود به مسائل متقارن نیست [Nowaki, 1954]. هو حالت محیط ایزوتروپ جانبی را در حالت کلی مورد توجه قرار داده و تابع پتانسیل لخنسکی را برای حالت کلی تکمیل کرده است [Hu, 1953]. این تابع هم اکنون در ادبیات مکانیک محیط با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت نام تابع لخنسکی-هو-نواکی نامیده می‌شود [Eskandari-Ghadi, 2005]. بررسی محیط با رفتار ایزوتروپ جانبی به وسیله دیگران همچون الیوت [Elliott, 1944]، ایوبنکس و استرنبرگ [Eubanks and Strenberg, 1954]، پن و چو [Pan and Chow – 1979] و ونگ و ونگ [Wang and Wang, 1995] نیز در حالت استاتیکی بررسی شده است. این محیط در حالت دینامیکی توسط اسکندری قادی [Eskandari-Ghadi, 2005]، رحیمیان و همکاران [Rahimian et al, 2007] و دیگران مورد توجه قرار گرفته است.

در این مقاله، یک فضای نامتناهی متشکل از دو نیم فضای ایزوتروپ جانبی با خصوصیات متفاوت در نظر گرفته می‌شود. محور ایزوتروپی این دو نیم‌فضا موازی یکدیگر و عمود بر فصل مشترک دو نیم‌فضا اختیار می‌گردد. نیروی گسترده استاتیکی و دلخواه مؤثر بر سطح کوچک  $\pi_s$  روی صفحه موازی فصل مشترک دو نیم‌فضا و در عمق  $S$  نسبت به فصل مشترک دو نیم‌فضا در نظر گرفته می‌شود. مسئله مشابه با این تفاوت که نیروهای متمرکز جایگزین نیروی گسترده دلخواه شود به وسیله پن و چو [۱۹۷۳] در نظر گرفته شده است. پن و چو بدون ارائه راه حل، جواب‌ها را فرض کرده و از آن جواب تحلیلی برای مسئله ارائه کرده‌اند. این مسئله همچنین به وسیله لیائو و ونگ [Liao and Wang, 1998] با هدف تعیین پاسخ یک محیط نیم‌بی نهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی متمرکز بررسی شده است. در مقاله‌شان، لیائو و ونگ ترکیب مختلط تغییر مکان‌های شعاعی و محیطی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به همراه تغییر مکان قائم را به عنوان توابع مجهول جدید اختیار کرده و با استفاده از سری فوریه و تبدیل هنکل دستگاه معادلات با مشتقات جزئی تعادل را به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرده‌اند. همچنین برای بدست آوردن جواب مسئله نیم‌فضا، دو فضای کامل در نظر گرفته و سازگاری ترکیب جواب‌های این دو فضای کامل برای داشتن تنش‌های صفر در سطح آزاد نیم‌فضا برقرار کرده‌اند. در اینجا یک راه حل سیستماتیک برای تعیین تغییر مکان‌ها و تنش‌ها در هر نقطه دلخواه از فضای کامل ارائه می‌گردد. بدین منظور معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از توابع پتانسیل لخنسکی-هو-نواکی مجزا شده و معادلات حاکم بر توابع پتانسیل به وسیله سری فوریه و تبدیل هنکل در فضای هنکل فوریه حل می‌شوند. تغییر مکان‌ها و تنش‌ها به ترتیب با استفاده از روابط تغییر مکان-توابع پتانسیل و تنش-تغییر مکان بدست آمده و به صورت انتگرال‌های یک بعدی در فضای واقعی نوشته می‌شوند. این انتگرال‌ها به صورت عددی برآورد شده و به صورت منحنی‌هایی بر حسب مکان به نمایش در می‌آیند. در برآورد عددی اثر میزان نایزوتروپی‌های متفاوت نشان داده می‌شود.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد سازه - دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل، ایران

<sup>۲</sup> استادیار - دانشگاه علوم و فنون مازندران، بابل، ایران

## بیان مسئله و معادلات حاکم

محیط کاملاً نامتناهی ارتجاعی دو ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی را در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  چنان در نظر می‌گیریم که محور  $z$  عمود بر صفحه ایزوتروپی نیم‌فضای فوقانی و نیم‌فضای تحتانی باشد (شکل ۱). با توجه به اینکه نیروی استاتیکی در عمق  $z=s$  در نیم‌فضای تحتانی وارد می‌شود محیط بینهایت به سه لایه مجزا تقسیم می‌شود به طوری که نیم‌فضای فوقانی شامل لایه اول و نیم‌فضای تحتانی شامل لایه‌های دوم و سوم می‌باشد. در این مقاله خصوصیات مکانیکی لایه‌های دوم و سوم مثل هم و متمایز از لایه اول در نظر گرفته می‌شود. در اینصورت در غیاب نیروهای حجمی، معادلات تعادل استاتیکی بر حسب تنش‌ها برای هر یک از لایه‌های محیط نامتناهی، بصورت زیر نوشته می‌شوند [Lekhnitskii, 1981]:

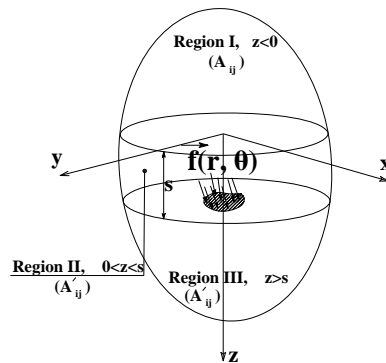
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  مولفه‌های تانسور تنش می‌باشند. رابطه تنش - کرنش در مصالح ایزوتروپ جانبی بصورت زیر است  $[\lambda]$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = A_{11} \varepsilon_{rr} + A_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13} \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12} \varepsilon_{rr} + A_{11} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{13} \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = A_{13} \varepsilon_{rr} + A_{13} \varepsilon_{\theta\theta} + A_{33} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{rz} = 2A_{44} \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\theta z} = 2A_{44} \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{r\theta} = 2A_{66} \varepsilon_{r\theta} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن  $A_{ij}$  ثابت‌های ارتجاعی بوده و داریم:

$$A_{66} = (A_{11} - A_{12})/2 \quad (3)$$



شکل (۱): محیط بی‌نهایت دو ماده‌ای با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر نیروی دلخواه  $\bar{f}(r, \theta)$  مؤثر بر یک سطح محدود

اگر  $E$  معرف مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی،  $E'$  معرف مدول یانگ عمود بر صفحه ایزوتروپی،  $\nu$  معرف ضریب پواسون در صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی در صفحه ایزوتروپی به علت کشش در همین صفحه)،  $\nu'$  معرف ضریب پواسون عمود بر صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی عمود بر صفحه ایزوتروپی به علت کشش در این صفحه)،  $G$  معرف مدول برشی در صفحه ایزوتروپی و  $G'$  معرف مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد آنگاه:

$$A_{11} = \frac{E(1 - \frac{E}{E'} \nu^2)}{(1 + \nu)(1 - \nu - 2\frac{E}{E'} \nu^2)}, \quad A_{13} = \frac{E \nu'}{1 - \nu - 2\frac{E}{E'} \nu^2}, \quad A_{33} = \frac{E'(1 - \nu)}{1 - \nu - 2\frac{E}{E'} \nu^2}, \quad A_{44} = G', \quad A_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \quad (4)$$

همچنین رابطه کرنش - تغییرمکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شرح زیر است [Lekhnitskii, 1981]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} + U \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V}{r} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $U, V, W$  مولفه‌های بردار تغییر مکان هستند. با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (۲)، تنش‌ها بر حسب تغییرمکان‌ها بدست می‌آیند. با قرار دادن روابط تنش - تغییرمکان در معادلات (۱)، معادلات تعادل بر حسب مولفه‌های بردار تغییرمکان به صورت زیر بدست می‌آیند:



$$\begin{aligned}
& A_{11} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) + \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{A_{11} + A_{12}}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\
& \quad - 2A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} = 0, \\
& \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) + A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + A_{44} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{A_{11} + A_{12}}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \\
& \quad + 2A_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + (A_{13} + A_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial z} = 0, \\
& A_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + A_{44} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + (A_{13} + A_{44}) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + (A_{13} + A_{44}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial z} = 0
\end{aligned} \tag{۶}$$

### جواب‌های کلی معادلات تعادل

معادلات تعادل (۷) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند. به منظور مجزا سازی این معادلات از تابع پتانسیل  $F$  و  $\chi$  که همان توابع هو-نواکی-لخنیتسکی می‌باشند، استفاده می‌شود. مولفه‌های بردار تغییر مکان بر حسب توابع پتانسیل  $F$  و  $\chi$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت استاتیکی به صورت زیر نوشته می‌شوند [Wang and Wang, 1995]:

$$U = -\alpha_3 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad V = -\alpha_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad W = (1 + \alpha_1) \left[ \nabla^2 r \theta + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F \tag{۷}$$

که در آن:

$$\alpha_1 = \frac{A_{66} + A_{12}}{A_{66}}, \quad \alpha_2 = \frac{A_{44}}{A_{66}}, \quad \alpha_3 = \frac{A_{13} + A_{44}}{A_{66}}, \quad \beta = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1}, \quad \nabla_{r\theta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{۸}$$

با قرار دادن روابط (۷) در معادلات تعادل (۶)، دو معادله دیفرانسیل کاملاً مستقل از هم و حاکم بر توابع پتانسیل  $F$  و  $\chi$  بصورت زیر درمی‌آیند:

$$\left[ \nabla_1^2 \nabla_2^2 \right] F(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla_0^2 \chi(r, \theta, z) = 0. \tag{۹}$$

که در آن:

$$\nabla_i^2 = \nabla_{r\theta}^2 + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (i = 0, 1, 2), \quad s_0^2 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{A_{66}}{A_{44}} \tag{۱۰}$$

پارامترهای  $S_1^2$  و  $S_2^2$  ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$A_{33} A_{44} s^4 + (A_{13}^2 + 2A_{13} A_{44} - A_{11} A_{33}) s^2 + A_{11} A_{44} = 0 \tag{۱۱}$$

$S_1$  و  $S_2$  می‌توانند اعداد مختلط باشند اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [Lekhnitskii, 1981].

به منظور حل معادلات (۹) و (۱۰)، می‌توان توابع  $F$  و  $\chi$  را نسبت به  $\theta$  به صورت سری فوریه نوشت. سری فوریه مختلط این توابع بصورت زیر هستند [Sneddon, 1951]:

$$F(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(r, z) e^{im\theta}, \quad \chi(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_m(r, z) e^{im\theta} \tag{۱۲}$$

که در آن  $F_m$  و  $\chi_m$  ضرایب  $m$ ام سری فوریه توابع  $F$  و  $\chi$  هستند [Sneddon, 1951]:

$$[F_m, \chi_m(r, z)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F, \chi(r, \theta, z)] e^{-im\theta} d\theta \tag{۱۳}$$

با قرار دادن روابط (۱۴) و (۱۵) به ترتیب در معادلات (۹) و (۱۰) این معادلات بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left[ \nabla_{1m}^2 \nabla_{2m}^2 \right] F_m(r, z) = 0, \quad \nabla_{0m}^2 \chi_m(r, z) = 0 \tag{۱۴}$$

که در آن برای  $i = (0, 1, 2)$ :



$$\nabla_{im}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (15)$$

با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب می‌باشد که از تبدیل هنکل مرتبه  $m$  نسبت به امتداد شعاعی  $r$  به شرح زیر استفاده شود [Sneddon, 1951]:

$$[F_m^m, \chi_m^m](\xi, z) = \int_0^\infty [F_m, \chi_m](r, z) r J_m(\xi r) dr \quad (16)$$

و تبدیل معکوس هنکل آنها عبارتند از:

$$[F_m, \chi_m](r, z) = \int_0^\infty [F_m^m, \chi_m^m](\xi, z) \xi J_m(\xi r) d\xi \quad (17)$$

که در آن  $J_m$  تابع بسل نوع اول از مرتبه  $m$  می‌باشد. با قرار دادن رابطه (۲۱) در معادلات (۱۷) و (۱۸) این معادلات بصورت زیر درمی‌آیند:

$$[\bar{\nabla}_{1m}^2 \bar{\nabla}_{2m}^2] F_m^m(\xi, z) = 0, \quad \bar{\nabla}_{0m}^2 \chi_{im}^m(\xi, z) = 0 \quad (18)$$

که در آن:

$$\bar{\nabla}_i^2 = d^2 / (s_i^2 dz^2) - \xi^2 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (19)$$

معادلات (۲۲) و (۲۳) به ترتیب یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه چهارم و یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه دوم با ضرایب ثابت می‌باشند. جواب این معادلات در لایه‌های I, II و III به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$F_{Im}^m(\xi, z) = C_{Im}(\xi) e^{\lambda_1 z} + D_{Im}(\xi) e^{\lambda_2 z}, \quad \chi_{Im}^m(\xi, z) = H_{Im}(\xi) e^{\lambda_3 z} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} F_{IIIm}^m(\xi, z) &= A_{IIIm}(\xi) e^{-\lambda_1' z} + B_{IIIm}(\xi) e^{-\lambda_2' z} + C_{IIIm}(\xi) e^{\lambda_1' z} + D_{IIIm}(\xi) e^{\lambda_2' z} \\ \chi_{IIIm}^m(\xi, z) &= G_{IIIm}(\xi) e^{-\lambda_3' z} + H_{IIIm}(\xi) e^{\lambda_3' z} \end{aligned} \quad (21)$$

$$F_{IIIIm}^m(\xi, z) = A_{IIIIm}(\xi) e^{-\lambda_1' z} + B_{IIIIm}(\xi) e^{-\lambda_2' z}, \quad \chi_{IIIIm}^m(\xi, z) = G_{IIIIm}(\xi) e^{-\lambda_3' z}, \quad (22)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = s_1 \xi, \quad \lambda_2 = s_2 \xi, \quad \lambda_3 = s_0 \xi, \quad \lambda_1' = s_1' \xi, \quad \lambda_2' = s_2' \xi, \quad \lambda_3' = s_0' \xi \quad (23)$$

$\lambda_j, \lambda_j'$  ( $j = 1, 2, 3$ ) چنان اختیار می‌گردند که قسمت حقیقی آن مثبت باشند. در این صورت جواب‌های داده شده در روابط (۲۵ تا ۲۷) چنان هستند که شرط توزیع هندسی نیروها در آنها رعایت شده و کلیه توابع در لایه اول برای  $Z \rightarrow -\infty$  و در لایه سوم برای  $Z \rightarrow +\infty$  به سمت صفر میل می‌کنند. توابع  $C_{Im}$  تا  $G_{IIIIm}$  توابعی مجهول می‌باشند که با استفاده از شرایط پیوستگی در مرزهای  $Z = S$  و  $Z = 0$  بدست می‌آیند.

مطابق شکل (۱) فرض می‌شود که نیروی استاتیکی دلخواه به شدت  $\vec{f}(r, \theta)$  روی صفحه  $Z=S$  در  $\pi_s$  اعمال می‌گردد. بر این اساس شرایط پیوستگی در  $Z=0$  و  $Z=S$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, \theta, z=0) - \sigma_{rz}(r, \theta, z=0) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta, z=0) - \sigma_{r\theta}(r, \theta, z=0) = 0, \quad \sigma_{zz}(r, \theta, z=0) - \sigma_{zz}(r, \theta, z=0) = 0, \\ u_I = u_{II}, \quad v_I = v_{II}, \quad w_I = w_{II}, \quad (r, \theta, z=0). \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_{rz}(r, \theta, z=S) - \sigma_{rz}(r, \theta, z=S) &= P(r, \theta), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, z=S) - \sigma_{r\theta}(r, \theta, z=S) &= Q(r, \theta), \\ \sigma_{zz}(r, \theta, z=S) - \sigma_{zz}(r, \theta, z=S) &= R(r, \theta), \end{aligned} \right\} (r, \theta) \in \pi_s \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{rz}(r, \theta, z=S) - \sigma_{rz}(r, \theta, z=S) &= 0, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, z=S) - \sigma_{r\theta}(r, \theta, z=S) &= 0, \\ \sigma_{zz}(r, \theta, z=S) - \sigma_{zz}(r, \theta, z=S) &= 0, \end{aligned} \right\} (r, \theta) \notin \pi_s \\ u_{II} = u_{III}, \quad v_{II} = v_{III}, \quad w_{II} = w_{III}, \quad (r, \theta, z=S). \end{aligned} \quad (25)$$



در بینهایت دور ( $z \rightarrow \pm\infty$ ) یا ( $r \rightarrow \infty$ ) کلیه مؤلفه‌های تانسور تنش و بردار تغییرمکان صفر هستند. شرایط در ( $r \rightarrow \infty$ ) در تبدیل هنکل دیده شده است و شرایط در ( $z \rightarrow \pm\infty$ ) در رابطه (۲۵ تا ۲۷) در نظر گرفته شده است. در روابط (۳۰)،  $P(r, \theta)$ ،  $Q(r, \theta)$  و  $R(r, \theta)$  مؤلفه‌های بردار بارگذاری  $\vec{f}(r, \theta)$  به ترتیب در امتدادهای  $r, \theta, z$  می‌باشند.

شرایط پیوستگی داده شده باید در فضای هنکل-فوریه نوشته شوند، تا با جایگزینی معادلات (۲۵ تا ۲۷) در آنها، بتوان ۱۲ تابع  $C_{Im}$  تا  $G_{IIIIm}$  را بدست آورد. بدین منظور تغییرمکانها و تنش‌ها به صورت زیر با هم ترکیب شده تا بر حسب توابع  $F_{qm}^m, \chi_{qm}^m$  در هر لایه نوشته شوند: با قرار دادن ضرایب (۳۵) و (۳۷) در روابط (۲۵) تا (۲۷)، توابع  $F_{qm}^m$  و  $\chi_{qm}^m$  در لایه‌های  $q = I, II, III$  بدست می‌آیند. با در اختیار داشتن این توابع، توابع تغییرمکان با استفاده از (۳۱) در لایه‌های  $q = I, II, III$  به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} u_{qm}(r, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \xi \left( -\alpha_3 \xi \frac{dF_{qm}^m}{dz} - i \xi \chi_{qm}^m \right) J_{m-1}(\xi r) + \xi \left( \alpha_3 \xi \frac{dF_{qm}^m}{dz} - i \xi \chi_{qm}^m \right) J_{m+1}(\xi r) \right] d\xi, \\ v_{qm}(r, z) &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \left[ \xi \left( -\alpha_3 \xi \frac{dF_{qm}^m}{dz} - i \xi \chi_{qm}^m \right) J_{m-1}(\xi r) - \xi \left( \alpha_3 \xi \frac{dF_{qm}^m}{dz} - i \xi \chi_{qm}^m \right) J_{m+1}(\xi r) \right] d\xi, \\ w_{qm}(r, z) &= \int_0^\infty \xi \left( (1 + \alpha_1) [-\xi^2 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2}] F_{qm}^m \right) J_m(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (26)$$

## نتایج عددی

انتگرال‌گیری تحلیلی از روابط (۳۹) و (۴۰) اگر غیرممکن نباشد بسیار مشکل است. به منظور ارائه نتایج عددی، ۳ نوع مصالح مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی در نظر گرفته شده است. جدول (۱) مقادیر ضرایب  $E, E', G, G', \nu, \nu'$  را برای این مواد ارائه می‌کند. به منظور ارائه نتایج گرافیکی ترکیبی از مصالح جدول (۱)، مطابق جدول (۲) تعریف شده و نتایج آن به صورت گرافیکی می‌تواند ارائه گردد.

جدول (۱): خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف

| Material    | $E$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $E'$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $G$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $G'$<br>(N/mm <sup>2</sup> ) | $\nu$ | $\nu'$ |
|-------------|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------|--------|
| 1<br>(T.I.) | 50000                       | 150000                       | 20000                       | 20000                        | 0.25  | 0.25   |
| 2<br>(T.I.) | 100000                      | 50000                        | 40000                       | 20000                        | 0.25  | 0.25   |
| 3<br>(T.I.) | 150000                      | 50000                        | 60000                       | 20000                        | 0.25  | 0.25   |

جدول (۲): خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف در حالت‌های مختلف (شکل ۴) برای تعیین جواب عددی

| Case | i | ii | iii |
|------|---|----|-----|
| I    | ۱ | ۲  | ۳   |
| II   | ۱ | ۱  | ۱   |
| III  | ۱ | ۱  | ۱   |

انتگرال‌گیری از روابط (۳۹) و (۴۰) نیاز به دقت خاصی دارد. وجود توابع بسط با روند بطنی کاهش دامنه و حدود بی‌نهایت در انتگرال‌ها مشکلات برآورد عددی را دو چندان می‌کند. در اینجا با روش Adaptive quadrature انتگرال‌ها برآورد عددی شده و برخی از آنها به صورت گرافیکی در شکل‌های (۲) تا (۷) نشان داده شده‌اند.

شکل (۲) تغییرمکان قائم ناشی از یک نیروی گسترده یکنواخت قائم مؤثر بر یک دایره به شعاع  $a$  را برای حالت‌های (i)، (ii) و (iii) معرفی شده در جدول (۲) بر حسب عمق نشان می‌دهد. حالت (i) معرف یک فضای کامل شامل مصالح نوع (۱) مطابق جدول (۱) می‌باشد. در حالت‌های (ii) و (iii) نیم‌فضای تحتانی شامل مصالح نوع (۱) و نیم‌فضای فوقانی به ترتیب شامل مصالح نوع (۲) و نوع (۳) می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود منحنی تغییرمکان در محل اعمال بار با تیزی همراه بوده و منحنی شیب از سمت راست و چپ تغییرمکان در این محل کاملاً در خلاف جهت هم می‌باشند. در سطح تماس دو نیم‌فضا ( $z=0$ )، منحنی تغییرمکان در حالت (i) کاملاً هموار می‌باشد در حالتی که در حالات (ii) و (iii) به علت تغییر خواص ارتجاعی با شکستگی همراه است. از آنجاکه نیم‌فضای تحتانی در حالات (ii) و (iii) یکسان و از نوع (۱) هستند، تغییرمکان نیم‌فضای تحتانی در این حالات بسیار نزدیک به هم می‌باشند و اندک تفاوت آنها به علت تفاوت نیم‌فضای فوقانی در این حالات است. در شکل (۳) تابع تنش  $\sigma_{zz}$  را بر حسب عمق بر نیروی گسترده یکنواخت قائم مؤثر بر یک دایره به شعاع  $a$  در عمق  $z=a$  برای حالت‌های (i)، (ii) و (iii) نشان می‌دهد. این تنش مطابق انتظار در محل اثر نیرو پیوسته نبوده و اختلاف تنش در بالا و پایین محل اثر نیرو برابر



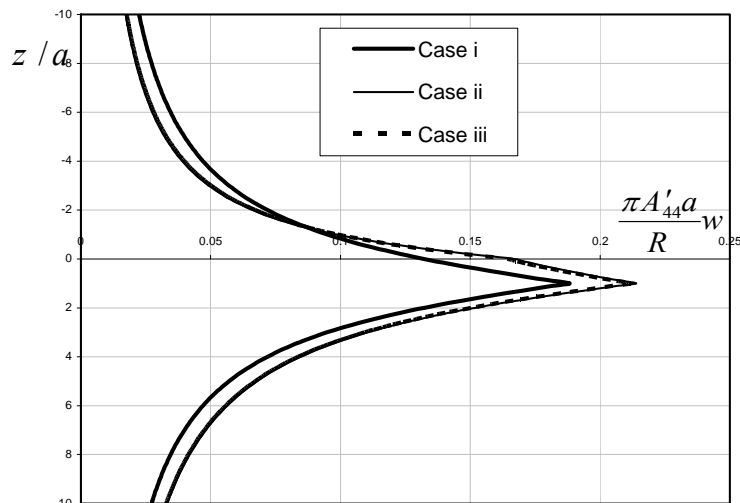
$R/\pi a^2$  می‌باشد. از آنجایی که تنش به صورت  $\frac{1}{\pi R/\pi a^2} \sigma_{zz}$  بی بعد شده‌است، این اختلاف برابر  $\frac{1}{\pi} = 0.31830989$  می‌باشد. این تنش در نیم

فضای فوقانی با یکدیگر متفاوت بوده و برای حالت‌های (ii) و (iii) که  $E'$  در آنها یکسان است به هم نزدیکتر می‌باشند. اما نیم‌فضای تحتانی در همه حالات شامل مصالح شماره (۱) می‌باشد و همانطور که مشاهده می‌شود هر چقدر که از نیم‌فضای فوقانی دور می‌شویم، این تنش در حالات مختلف به یکدیگر نزدیکتر می‌شوند.

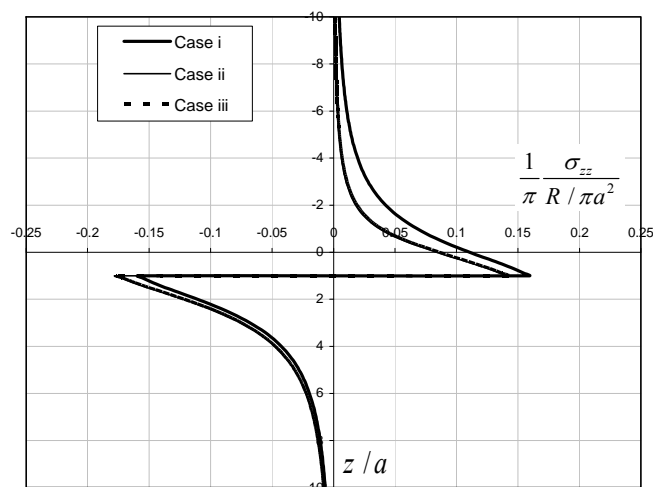
در شکل (۴) تغییرمکان افقی بر حسب عمق، در شکل (۵) این تغییرمکان بر حسب فاصله افقی و در شکل (۶) تنش  $\sigma_{rz}$  بر حسب عمق برای نیروی گسترده یکنواخت افقی مؤثر بر سطح یک دایره به شعاع  $a$  در عمق  $z=a$  نشان داده شده‌اند توصیف این اشکال مانند شکل‌های (۲) و (۳) با توجه به حالات (i)، (ii) و (iii) مطابق جدول (۲) بوده و به منظور کوتاهی سخن حذف شده‌اند.

### نتیجه گیری

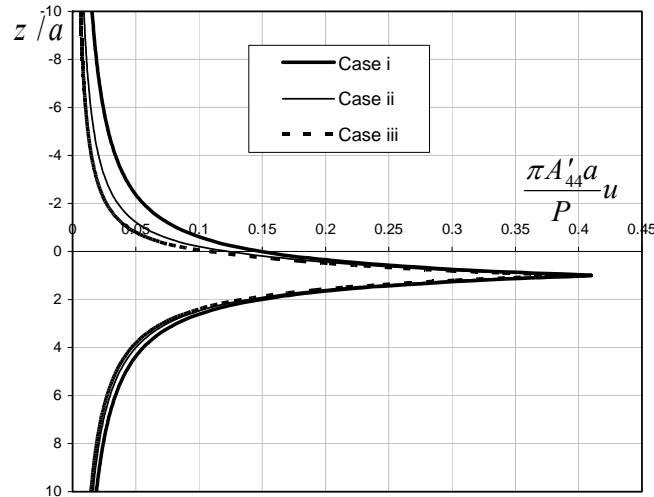
در این مقاله برعکس پن و چو (۱۹۷۶) یک روش سیستماتیک بر مبنای توابع پتانسیل لخنسکی\_هو\_نواکی [Lekhnitskii, 1980, Nowaki, 1954, Hu, 1953] برای حل مسائل الاستواستاتیک در محیط‌های ایزوتروپ جانبی ارائه شده است. بدین منظور پس از مجزاسازی معادلات حاکم بر محیط با استفاده از سری فوریه و تبدیل هنکل معادلات با مشتقات جزئی به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی درآمده و پس از حل دو نیم‌فضای کامل چسبیده به یکدیگر، تغییرمکان‌ها و تنش‌ها در فضای تبدیل یافته بدست آمده‌اند. جواب‌ها در فضای واقعی برای نیروی مؤثر در عمق دلخواه به صورت انتگرال‌های یک بعدی ناسره ارائه شده و برآورد عددی آنها به روش Adaptive quadrature انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که میزان یا درجه نالیزوتروپی می‌تواند روی پاسخ محیط تأثیر قابل توجهی داشته باشند.



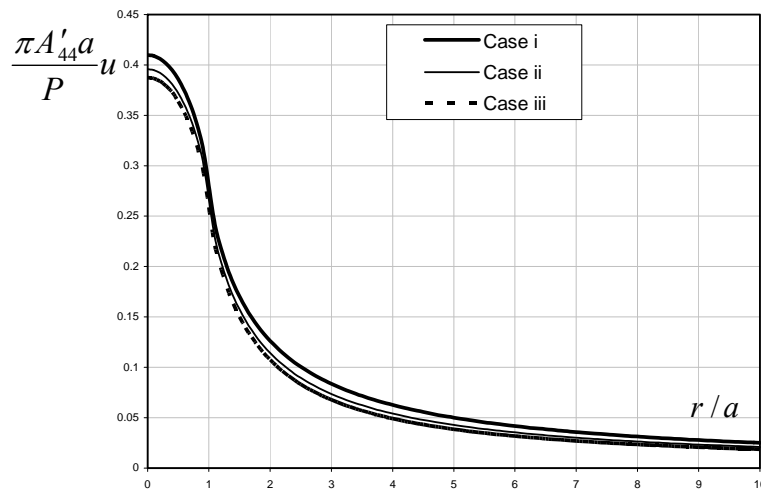
شکل (۲): مولفه تغییرمکان در جهت محور  $z$  ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور  $z$  مؤثر بر دایره ای به شعاع  $a$  بر حسب عمق



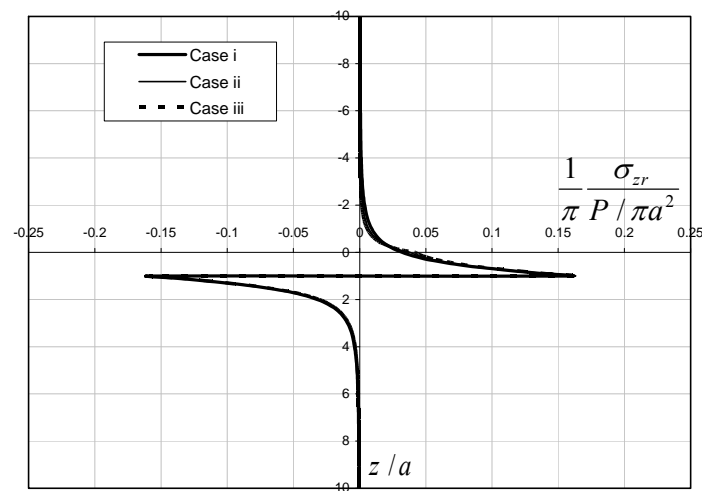
شکل (۳): تنش  $\sigma_{zz}$  ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور  $z$  مؤثر بر دایره ای به شعاع  $a$  بر حسب عمق



شکل (۴): تغییر مکان در جهت محور X ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور X مؤثر بر دایره ای به شعاع a بر حسب عمق



شکل (۵): تغییر مکان در جهت محور X ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور X مؤثر بر دایره ای به شعاع a بر حسب فاصله افقی



شکل (۶): تنش  $\sigma_{zr}$  ناشی از بار گسترده یکنواخت با برآیند واحد در جهت محور X مؤثر بر دایره ای به شعاع a بر حسب عمق



## مراجع

- 1 H. A. Elliott, 'Three dimensional stress distribution in hexagonal aeolotropic crystals', *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 44, (1948), pp 522-533.
- 2 Eskandari-Ghadi, M., (2005), "A complete solutions of the wave equations for transversely isotropic media", *J. of Elasticity*, 81, 1-19.
- 3 Eubanks, R. A. and Sternberg, E. On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy. *Journal of rational mechanics and analysis*, 1954: 3, 89-101.
- 4 H. C. Hu, 'On the three dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body', *Sci. Sinica*, Vol. 2, (1953), pp 145-151
- 5 Lamb, H. (1904), "On the propagation tremTrans., *Royal Society of London*, A (203), 1-42
- 6 Lekhnitskii, S. G. (1981), *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Mir Publishers Moscow.
- 7 J. H. Michell, 'The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary', *Proceeding of the London mathematical society*, Vol. 32, (1900), pp 247-258.
- 8 W. Nowacki, 'The stress function in three dimensional problems concerning an elastic body characterized by transversely isotropy', *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Vol. 2, (1954), pp 21-25.
- 9 Pan, Y. C., and Chou, T. W., (1979), "Green's functions solutions for semi-infinite transversely isotropic materials." *Int. J. Eng. Sci.*, 17(5), 545-551.
- 10 Rahimian, M., Eskandari-Ghadi, M., Pak, R. Y. S. and Khojasteh, A., (2007), "An Elastodynamic Potential Method for a Transversely Isotropic Solid", *ASCE Mech. Dev.* (in pres).
- 11 Sneddon, I. N. (1951). *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York, N. Y.
- 12 Stoneley, R. (1949). "The seismological implications of aeolotropy in continental structures." *Royal Astronomical Soc. Monthly Notices, Geophysical Supplement, London, England*, 5, 343-353.
- 13 Wang, M. Z. and Wang, W. 'Completeness and Nonuniqueness of General Solutions of Transversely Isotropic Elasticity', *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 32 No. 374, (1995), pp 501-513.