



## روش انتگرال گیری مستقیم زمانی با شتاب مرتبه دوم برای مسائل دینامیک سازه

مهدی کریمی راد<sup>۱</sup>، مهدی قاسمیه<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

۲- دکتری مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

\* mghassem@ut.ac.ir

### خلاصه

در این تحقیق یک روش جدید انتگرال گیری مستقیم زمانی برای حل عددی معادله دیفرانسیل حرکت معرفی می‌گردد. تابع تغییرات شتاب به صورت یک چند جمله‌ای درجه دو در هر گام زمانی فرض گردیده و معادلات دو پارامتری برای تقریب راه حل در انتهای هر گام زمانی پیشنهاد می‌گردد. روش پیشنهادی شامل خانواده‌ای از روشهای بدون شرط پایدار می‌باشد. مرتبه همگرایی روش پیشنهادی همواره دو می‌باشد و از دقت بهتری نسبت به روشهای کلاسیک برخوردار است.

کلمات کلیدی: انتگرال گیری مستقیم زمانی، چند جمله‌ای درجه دو، دو پارامتری، مرتبه همگرایی

### مقدمه

در این نوشته یک روش جدید انتگرال گیری مستقیم زمانی برای تحلیل دینامیکی سازه‌ها پیشنهاد شده است. تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت یک چند جمله‌ای درجه دو در نظر گرفته شده است. با فرض اخیر و استفاده از دو پارامتر به خانواده‌ای از روشهای بدون شرط پایدار و با دقت بالا رسیده‌ایم. خطای پراکندگی و افت عددی برای روش پیشنهادی اندازه گیری شده و با روشهای کلاسیک مقایسه گردیده است. میزان افت عددی در مدهای پایین که اهمیت بالایی در پاسخ کلی سازه دارند نسبت به روشهای کلاسیک کمتر می‌باشد. از طرفی دیگر میزان افت عددی در مدهای بالا و مصنوعی به اندازه‌ای می‌باشد که روش پیشنهادی توانایی حذف اثرات آنها را از پاسخ کلی سازه دارد. مرتبه همگرایی روش پیشنهادی صرفنظر از مقادیر پارامترها دو می‌باشد. الگوریتم گام به گام برای استفاده در برنامه‌های کامپیوتری ارائه شده است. معادله دیفرانسیل حرکت به صورت دقیق هم در ابتدا و هم در انتهای گام زمانی ارضا می‌گردد. خطای پراکندگی روش پیشنهادی از روشهای کلاسیک و دارای افت عددی کمتر می‌باشد. ابتدا فرض کنید می‌خواهیم پاسخ سازه را در لحظه  $t$  تعیین کنیم. ابتدا بازه زمانی  $[0, t]$  به  $n$  زیر بازه افراز می‌شود که معمولاً طول این زیر بازه‌ها مساوی و برابر  $\Delta t$  اختیار می‌گردد. سپس نحوه تغییرات شتاب، سرعت و تغییر مکان در هر گام زمانی حدس زده می‌شود. در نهایت تلاش می‌گردد که معادله دیفرانسیل حرکت در نقاط افراز شده توسط بازه‌های زمانی، ارضا گردد. در تحلیل سازه‌های چند درجه آزادی بسیار مهم است که روش انتگرال گیری زمانی بدون شرط پایدار باشد. از این جهت در این تحقیق سعی شده است روش پیشنهادی علاوه بر دقت مناسب، بدون شرط پایدار باشد. روش پیشنهادی با روشهای نیومارک [۱] و ویلسون [۲] که از دقت مناسبی در مسائل دینامیک سازه‌ها برخوردار می‌باشند، مقایسه شده است. در تحلیل دینامیکی سازه‌ها علاوه بر روش انتگرال گیری مستقیم زمانی از روش آنالیز مودال نیز می‌توان استفاده نمود. روش انتگرال گیری مستقیم زمانی در تحلیل غیرخطی سازه‌ها نیز می‌تواند استفاده شود، در حالی که روش آنالیز مودال محدود به مسائل خطی می‌باشد. بعلاوه در تحلیل سازه‌های با درجات آزادی زیاد استفاده از روشهای انتگرال گیری مستقیم زمانی نسبت به آنالیز مودال مناسب‌تر بوده و هزینه کمتری دارد.

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران



## روش پیشنهادی

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه ارتجاعی خطی به صورت ذیل تعریف میگردد:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P \quad (1)$$

که در آن  $M$ ،  $C$  و  $K$  به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سازه و  $U$ ،  $\dot{U}$ ،  $\ddot{U}$  و  $P$  به ترتیب بردارهای تغییر مکان، سرعت، شتاب و نیروهای وارده به سازه می‌باشند. نمادهای  ${}^tU$ ،  ${}^t\dot{U}$  و  ${}^t\ddot{U}$  به ترتیب بیانگر تغییر مکان، سرعت و شتاب در لحظه  $t$  می‌باشند. با در نظر گرفتن شتاب به صورت یک تابع درجه دو بر حسب زمان، روابط ذیل برای تقریب سرعت و تغییر مکان در لحظه  $t + \Delta t$  پیشنهاد شده است:

$${}^{t+\Delta t}\dot{U} = {}^t\dot{U} + \left[ \left( \delta - \frac{1}{4} \right) {}^{t-\Delta t}\ddot{U} + (1 - 2\delta) {}^t\ddot{U} + \left( \delta + \frac{1}{4} \right) {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t \quad (2)$$

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + {}^t\dot{U} \Delta t + \left[ \left( \alpha - \frac{1}{12} \right) {}^{t-\Delta t}\ddot{U} + \left( \frac{1}{2} - 2\alpha \right) {}^t\ddot{U} + \left( \alpha + \frac{1}{12} \right) {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \right] \Delta t^2 \quad (3)$$

پارامترهای  $\delta$  و  $\alpha$  تعیین کننده مشخصه‌های روش عددی از قبیل پایداری، دقت و میزان افت عددی می‌باشد. با توجه به معادلات فوق مشخص است که روش پیشنهادی یک روش ضمنی است، زیرا پاسخ سازه در زمان  $t + \Delta t$  صریحاً بر حسب مقادیر قبلی بیان نشده است و در سمت راست

معادلات (۲) و (۳) وجود دارد. روش پیشنهادی یک روش دو گامی می‌باشد. یعنی مقادیر جواب در زمان  $t$  بر حسب مقادیر جواب در دو

گام قبل یعنی  $t - \Delta t$  و  $t - 2\Delta t$  تعیین می‌شود.  ${}^0U$  و  ${}^0\dot{U}$  معلوم می‌باشند و در نتیجه  ${}^0\ddot{U}$  با بکار بردن معادله (۱) در لحظه  $t = 0$  تعیین می‌شود. مقادیر جواب در زمان  $\Delta t$  با استفاده از یک روش تک گامی دلخواه مانند روش شتاب متوسط و یا روش شتاب خطی تعیین می‌شود. پس از تعیین این مقادیر، روابط (۲) و (۳) می‌توانند استفاده شوند. با جای گذاری  $\delta = \frac{1}{4}$  و  $\alpha = \frac{1}{12}$  در روابط (۲) و (۳)، روابط روش شتاب خطی بدست می‌آید.

## پایداری روش پیشنهادی

برای بررسی پایداری روش پیشنهادی میبایست عملگر تقریب انتگرال گیری روش تعیین شود [۳]. بنابراین با معادله دیفرانسیل حرکت سازه یک درجه آزادی با جرم  $m$ ، میرایی  $c$ ، نیروی  $p$  و تنها مؤلفه حرکتی  $u(t)$  شروع می‌کنیم:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} + 2\xi\omega {}^{t+\Delta t}\dot{u} + \omega^2 {}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}r \quad (4)$$

که در آن  $2\xi\omega = \frac{c}{m}$ ،  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  و  ${}^{t+\Delta t}r = \frac{{}^{t+\Delta t}p}{m}$  می‌باشند.  $\omega$  فرکانس طبیعی سازه بوده و پیوند حرکت  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  می‌باشد. اکنون اگر

معادلات (۲) و (۳) را برای سازه یک درجه آزادی بازنویسی کرده و از سمت راست این روابط به جای  ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$  و  ${}^{t+\Delta t}u$  در معادله (۴) استفاده کنیم،

یک معادله با تنها مجهول  ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$  بدست می‌آید. اگر این معادله بر حسب  ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$  حل گردیده و مجدداً در روابط (۲) و (۳) جایگذاری گردند می‌توان به رابطه بازگشتی ذیل رسید:

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \\ {}^t\ddot{u} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{u} \\ {}^{t+\Delta t}u \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} {}^t\ddot{u} \\ {}^{t-\Delta t}\ddot{u} \\ {}^t\dot{u} \\ {}^t u \end{Bmatrix} + [L] {}^{t+\Delta t}r \quad (5)$$

ماتریس  $A$  را عملگر تقریب انتگرال گیری و بردار  $L$  را عملگر نیرو می‌نامند [۳]. ضرائب ماتریس  $A$  و مؤلفه‌های بردار  $L$  در پیوست یک ارائه گردیده اند. شعاع طیفی ماتریس  $A$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \quad (6)$$

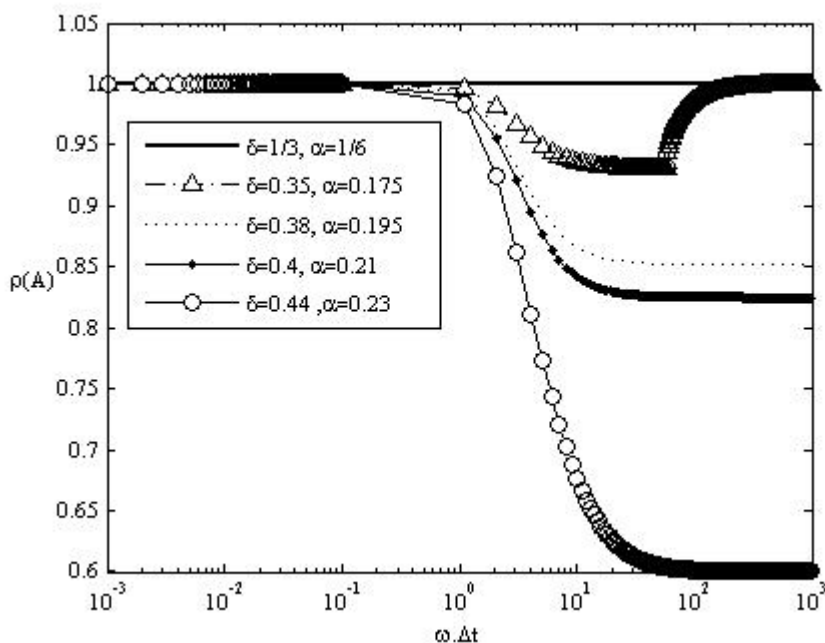
که در آن  $\lambda_i$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  می‌باشد. برای پایداری میبایست رابطه ذیل را داشته باشیم:

$$\rho(A) \leq 1 \quad (7)$$

با توجه به شرط (۷) و ضرائب ماتریس  $A$ ، روش پیشنهادی بدون شرط پایدار خواهد بود هر گاه بشرح ذیل داشته باشیم:

$$\delta \geq \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{\delta}{2} \leq \alpha \leq \delta - \frac{1}{6} \quad (8)$$

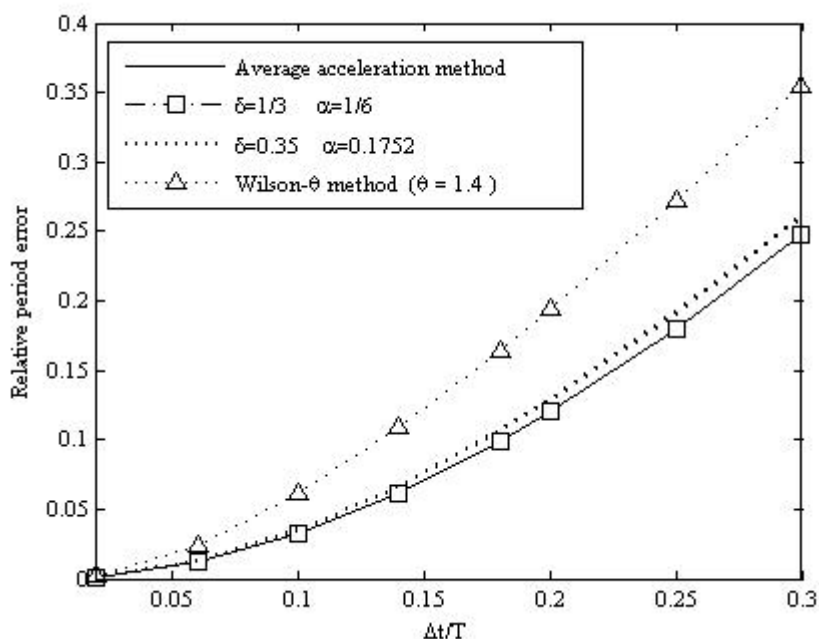
در شکل (۱) منحنی شعاع طیفی ماتریس  $A$  بر حسب  $\omega \cdot \Delta t$  به ازای مقادیر مختلف  $\delta$  و  $\alpha$  ترسیم شده است. با توجه به رابطه (۸) به ازای  $\delta = \frac{1}{3}$  پایداری بدون شرط تنها به ازای  $\alpha = \frac{1}{6}$  بدست می‌آید.



شکل ۱- منحنی شعاع طیفی ماتریس  $A$  بر حسب  $\omega \cdot \Delta t$

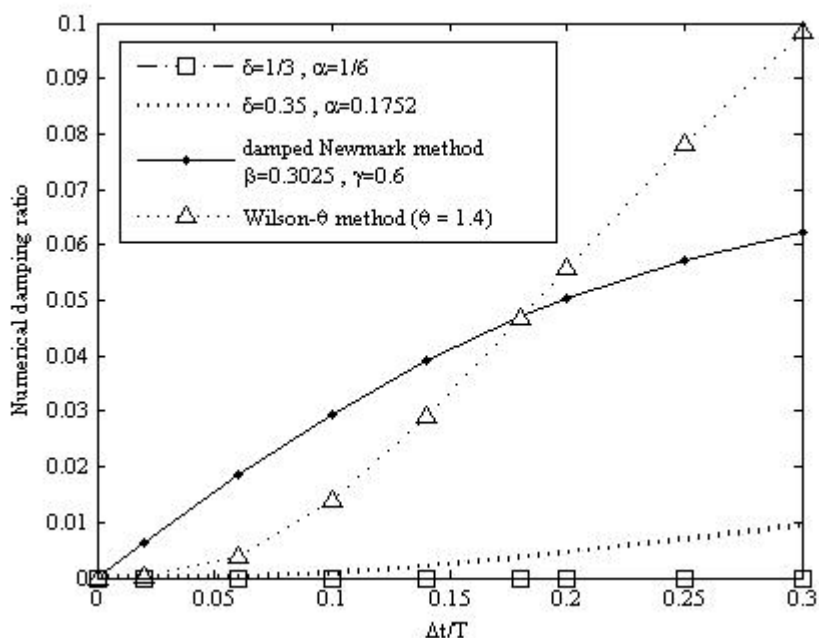
### دقت روش پیشنهادی

برای ارزیابی دقت یک روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، میبایست خطای پراکندگی و افت عددی اندازه‌گیری شود. خطای پراکندگی میزان افزایش یا کاهش پربودی را که از روش عددی بدست می‌آید، نسبت به پربود واقعی سازه نشان می‌دهد. افت عددی میزان افت مصنوعی را که به علت استفاده از یک روش عددی بر پاسخ واقعی سازه تحمیل می‌شود، نشان می‌دهد. خطای پراکندگی روش پیشنهادی به ازای  $\delta = \frac{1}{3}$  و  $\alpha = \frac{1}{6}$  با خطای پراکندگی روش شتاب متوسط یکسان می‌باشد و هر دو روش بدون افت عددی می‌باشند. برای میرا کردن مدهای بالاتر در سازه‌های با درجات آزادی زیاد به افت عددی نیاز داریم. روش پیشنهادی می‌تواند افت عددی داشته و همزمان خطای پراکندگی آن از دیگر روش‌های کلاسیک دارای افت عددی مانند روش ویلسون کمتر باشد. روش نیومارک هم می‌تواند دارای افت عددی باشد، لیکن مرتبه همگرایی آن از دو به یک تنزل می‌کند [۴]، در حالی که در روش پیشنهادی مرتبه همگرایی دو می‌باشد. در شکل (۲) نسبت خطای پربود که معیاری برای اندازه‌گیری خطای پراکندگی می‌باشد، مقایسه شده است. این شکل نشان می‌دهد خطای پراکندگی روش پیشنهادی از روش ویلسون کمتر و با روش شتاب متوسط یکسان می‌باشد.



شکل ۲- مقایسه نسبت خطای پرورد روش پیشنهادی، روش ویلسون و روش شتاب متوسط

در شکل (۳) نسبت میرایی عددی که معیاری برای اندازه‌گیری افت عددی می‌باشد مقایسه شده‌است. افت عددی روش پیشنهادی از هر دو روش ویلسون و نیومارک کمتر است.



شکل ۳- مقایسه نسبت میرایی عددی روش پیشنهادی، روش ویلسون و روش نیومارک

در این بخش یک مثال کلاسیک را با استفاده از روشهای ویلسون، پیشنهادی و شتاب متوسط حل می‌کنیم. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad (9)$$



شرایط اولیه را  ${}^0x = 1$  و  ${}^0\dot{x} = 0$  فرض می‌کنیم. جواب دقیق معادله (۹) با شرایط اولیه داده شده بصورت  $x_{exact} = \cos(t)$  می‌باشد. پرپود حرکت  $T = 2\pi$  می‌باشد. با انتخاب  $\Delta t = 0.1T$  معادله (۹) را با روشهای شتاب متوسط، ویلسون به ازای  $\theta = 1.4$  و پیشنهادی به ازای  $\delta = \frac{1}{3}$  و  $\alpha = \frac{1}{6}$  حل کرده‌ایم. نتایج حل و مقدار خطا در نقاط افراز شده توسط بازه‌های زمانی، در جدول (۱) نشان داده شده است. خطا در لحظه  $t$  به صورت  $r = |x - x_{exact}|$  تعریف شده است. برای روش پیشنهادی در گام اول از روش شتاب متوسط استفاده شده است.

جدول ۱- حل عددی معادله دیفرانسیل (۹) با استفاده از روشهای شتاب متوسط، ویلسون و پیشنهادی

Time	روش شتاب متوسط		روش ویلسون ( $\theta = 1.4$ )		روش پیشنهادی ( $\delta = 1/3, \alpha = 1/6$ )	
	${}^t x$	${}^t r$	${}^t x$	${}^t r$	${}^t x$	${}^t r$
$\Delta t$	0.8203	0.0113	0.8187	0.0097	0.8203	0.0113
$2\Delta t$	0.3459	0.0369	0.3529	0.0439	0.3405	0.0315
$3\Delta t$	-0.2528	0.0562	-0.2273	0.0817	-0.2616	0.0474
$4\Delta t$	-0.7607	0.0483	-0.7220	0.0870	-0.7698	0.0392
$5\Delta t$	-0.9952	0.0048	-0.9651	0.0349	-1.0013	0.0013
$6\Delta t$	-0.8722	0.0632	-0.8785	0.0694	-0.8731	0.0641
$7\Delta t$	-0.4357	0.1267	-0.4968	0.1877	-0.4311	0.1221
$8\Delta t$	0.1573	0.1517	0.0464	0.2627	0.1658	0.1433
$9\Delta t$	0.6938	0.1152	0.5649	0.2441	0.7031	0.1059
$10\Delta t$	0.9810	0.019	0.8843	0.1157	0.9878	0.0122

با توجه به نتایج جدول فوق ملاحظه می‌شود که روش پیشنهادی نتایج مناسب‌تری نسبت به روشهای شتاب متوسط و ویلسون نشان می‌دهد. واضح است که با افزایش مرتبه تابع تقریب شتاب، مرتبه همگرایی روش عددی افزایش پیدا کرده و در نتیجه دقت روش بهتر می‌شود [۵].

### الگوریتم گام به گام روش پیشنهادی

برای استفاده در برنامه‌های کامپیوتری، الگوریتم گام به گام روش پیشنهادی در جدول (۲) داده شده است.

جدول ۲- الگوریتم گام به گام روش پیشنهادی

(الف) محاسبات اولیه:

۱- ماتریس جرم  $M$ ، ماتریس سختی  $K$  و ماتریس میرایی  $C$  تشکیل می‌گردد.

۲- بردارهای اولیه  ${}^0U$ ،  ${}^0\dot{U}$  و  ${}^0\ddot{U}$  تشکیل می‌گردد.

۳- گام زمانی  $\Delta t$  و پارامترهای  $\delta$  و  $\alpha$  انتخاب گردیده و ثابت‌های انتگرالی بشرح ذیل محاسبه می‌شود:

$$a_0 = \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{12})\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{(\delta + \frac{1}{4})}{(\alpha + \frac{1}{12})\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{(\alpha + \frac{1}{12})\Delta t}$$

$$a_3 = \frac{(\frac{1}{2} - 2\alpha)}{(\frac{1}{12} + \alpha)}, \quad a_4 = \frac{(\alpha - \frac{1}{12})}{(\alpha + \frac{1}{12})}, \quad a_5 = \frac{(\delta + \frac{1}{4})}{(\alpha + \frac{1}{12})} - 1$$



## ادامه جدول ۲

۴ - ثابت‌های انتگرالی بشرح ذیل محاسبه می‌شود:

$$a_6 = \left( \frac{(\frac{1}{4} - \alpha)(4\delta + 1)}{(2\alpha + \frac{1}{6})} - 1 + 2\delta \right) \Delta t, \quad a_7 = \left( \frac{(\alpha - \frac{1}{12})(\delta + \frac{1}{4})}{(\alpha + \frac{1}{12})} - \delta + \frac{1}{4} \right) \Delta t$$

$$a_8 = \left( \delta - \frac{1}{4} \right) \Delta t, \quad a_9 = (1 - 2\delta) \Delta t, \quad a_{10} = \left( \delta + \frac{1}{4} \right) \Delta t$$

5 - با استفاده از یک روش تک گامی مانند روش شتاب متوسط مقادیر جواب در زمان  $\Delta t$  تعیین می‌گردد.6 - ماتریس سختی مؤثر بصورت مقابل تشکیل می‌گردد:  $\hat{K} = K + a_0 M + a_1 C$ 

(ب) محاسبات برای هر گام زمانی:

۱ - ماتریس بار مؤثر در لحظه  $t + \Delta t$  محاسبه می‌گردد:

$${}^{t+\Delta t} \hat{R} = {}^{t+\Delta t} R + M(a_0 {}^t U + a_2 {}^t \dot{U} + a_3 {}^t \ddot{U} + a_4 {}^{t-\Delta t} \ddot{U}) + C(a_1 {}^t U + a_5 {}^t \dot{U} + a_6 {}^t \ddot{U} + a_7 {}^{t-\Delta t} \ddot{U})$$

۲ - بردار تغییر مکان در لحظه  $t + \Delta t$  از رابطه مقابل محاسبه می‌گردد:  $\hat{K} {}^{t+\Delta t} U = {}^{t+\Delta t} \hat{R}$ ۳ - شتاب و سرعت در لحظه  $t + \Delta t$  از روابط ذیل محاسبه می‌گردد:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{U} = a_0 ({}^{t+\Delta t} U - {}^t U) - a_2 {}^t \dot{U} - a_3 {}^t \ddot{U} - a_4 {}^{t-\Delta t} \ddot{U}$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{U} = {}^t \dot{U} + a_8 {}^{t-\Delta t} \ddot{U} + a_9 {}^t \ddot{U} + a_{10} {}^{t+\Delta t} \ddot{U}$$

## نتیجه گیری

در این تحقیق برای معرفی یک روش جدید انتگرال‌گیری مستقیم زمانی که از دقت بهتری نسبت به روشهای کلاسیک برخوردار باشد، مرتبه تغییرات شتاب را افزایش داده‌ایم. بعلاوه برای رسیدن به یک روش بدون شرط پایدار، از دو پارامتر استفاده کرده‌ایم. مقایسه میزان افت عددی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی آن مقدار افت عددی که برای حذف مدهای بالاتر لازم است را دارا می‌باشد و میزان افت عددی آن در مدهای اصلی، کمتر از روشهای کلاسیک می‌باشد. مقایسه میزان خطای پراکندگی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی خطای پراکندگی کمتری از روشهای کلاسیک و با افت عددی دارد. خطای پراکندگی روش پیشنهادی با روش شتاب متوسط که یک روش بدون افت عددی می‌باشد یکسان است. معادله تعادل هم در ابتدا و هم در انتهای گام زمانی به صورت دقیق ارضا می‌گردد. مرتبه همگرایی روش پیشنهادی صرفنظر از مقادیر پارامترها، دو می‌باشد. الگوریتم گام به گام برای استفاده در برنامه‌های کامپیوتری ارائه شده‌است. یک مثال کلاسیک با استفاده از روشهای ویلسون، پیشنهادی و شتاب متوسط حل شده‌است. مقایسه خطا در این مثال، ارائه نتایج بهتر توسط روش پیشنهادی نسبت به روشهای ویلسون و شتاب متوسط را نشان می‌دهد.

## پیوست یک

در این پیوست آرایه‌های ماتریس  $A$  و مؤلفه‌های بردار  $L$  معرفی شده در رابطه (۵) ارائه می‌گردند. با توجه به رابطه (۵) واضح است که ماتریس  $A$  از مرتبه چهار می‌باشد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$a_{11} = -\left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right)\beta - \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\kappa, \quad a_{12} = -\left(\alpha - \frac{1}{12}\right)\beta - \left(2\delta - \frac{1}{2}\right)\kappa$$



$$\begin{aligned}
a_{13} &= \frac{1}{\Delta t}(-\beta - 2\kappa) \quad , \quad a_{14} = \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta) \\
a_{21} &= 1 \quad , \quad a_{22} = a_{23} = a_{24} = 0 \\
a_{31} &= \Delta t \left[ 1 - 2\delta - \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right)\left(\delta + \frac{1}{4}\right)\beta - (1 - 2\delta)\left(2\delta + \frac{1}{2}\right)\kappa \right] \\
a_{32} &= \Delta t \left[ \delta - \frac{1}{4} - \left(\delta + \frac{1}{4}\right)\left(\alpha - \frac{1}{12}\right)\beta - \left(\delta - \frac{1}{4}\right)\left(2\delta + \frac{1}{2}\right)\kappa \right] \\
a_{33} &= 1 - \beta\left(\delta + \frac{1}{4}\right) - 2\left(\delta + \frac{1}{4}\right)\kappa \quad , \quad a_{34} = \frac{-\beta}{\Delta t}\left(\delta + \frac{1}{4}\right) \\
a_{41} &= \Delta t^2 \left[ \frac{1}{2} - 2\alpha - \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right)\left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\beta - (2 - 4\delta)\left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\kappa \right] \\
a_{42} &= \Delta t^2 \left[ \alpha - \frac{1}{12} - \left(\alpha - \frac{1}{12}\right)\left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\beta - \left(2\delta - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\kappa \right] \\
a_{43} &= \Delta t \left[ 1 - \left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\beta - 2\left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\kappa \right] \\
a_{44} &= 1 - \left(\alpha + \frac{1}{12}\right)\beta
\end{aligned}$$

که در روابط فوق:

$$\beta = \left( \frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\left(\delta + \frac{1}{4}\right)}{\omega \Delta t} + \left(\alpha + \frac{1}{12}\right) \right)^{-1} \quad , \quad \kappa = \frac{\xi\beta}{\omega \Delta t}$$

بردار  $L$  نیز به صورت ذیل می‌باشد:

$$L = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} \\ 0 \\ \frac{\beta\left(\delta + \frac{1}{4}\right)}{\omega^2 \Delta t} \\ \frac{\beta\left(\alpha + \frac{1}{12}\right)}{\omega^2} \end{array} \right\}$$

مراجع

1. Newmark, N.M. (1959) A Method of Computation for Structural Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **85**, 67–94.
2. Wilson, E.L., Farhoomand, I. and Bathe, K.J. (1973) Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **1**, 241–252.
3. Bathe, K.J. (1996) *Finite element procedures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
4. Hughes, T.J.R. (1987) *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
5. Keierleber, C.W. and Rosson, B.T. (2005) Higher-Order Implicit Dynamic Time Integration Method. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **131**, 1267–1276.