کاربرد روش جریمه پویا در تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت گره

هدایت ذکایی آشتیانی[۱]، امیر حسین شهپر[۲]، عباس بابازاده[۳]

۱- استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

۲- دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

۳- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

ababazadeh@ut.ac.ir

۳.۰ cm

خلاصه

مسئله تخصیص ترافیک مسئله توزیع جریان در کمانهای یک شبکه حمل و نقل است. برای حل این مسئله، در حالتی که کمانها و گره‌های شبکه دارای ظرفیت نامحدود (برای عبور جریان) باشند، روشهای تکراری کارایی نظیر فرانک – ولف وجود دارند. در این روشها زیرمساله خطی شده در هر تکرار معادل مسئله کوتاهترین مسیر بین زوجهای مبدا – مقصد است. ولی در حالت کلی، ظرفیت کمانها و گره‌های شبکه محدود است و در نظرگیری صریح این نوع محدودیتها سبب می‌شود که زیرمسئله خطی شده به مساله جریان چند کالایی با هزینه کمینه تبدیل و در نتیجه حل آن بسیار سخت شود. یک روش برای حل این مشکل در نظرگیری ضمنی محدودیت ظرفیت با استفاده از یک تابع جریمه حساس به ظرفیت است به نحوی که اضافه نمودن این تابع جریمه به زمان سفر کمانها سبب رعایت محدودیت ظرفیت شود. در این روش، حل مساله با محدودیت ظرفیت گره به مراتب سختتر از حل آن با محدودیت ظرفیت کمان است، زیرا توابع زمان سفر تعمیم یافته (زمان سفر باضافه جریمه) در حالت اول غیر متقارن و در حالت دوم متقارن هستند. در ادبیات تخصیص ترافیک، نتایج کاربرد توابع جریمه در حالت محدودیت ظرفیت کمان برای شبکه‌های واقعی موجود و کارایی آنها به خوبی روشن است، در حالی که چنین نتایجی برای حالت محدودیت ظرفیت گره گزارش نشده است. در این مقاله، پس از معرفی یک تابع جریمه مناسب، مسئله تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت گره برای یک شبکه واقعی حل خواهد شد.

کلمات کلیدی: تخصیص ترافیک، محدودیت ظرفیت، روش جریمه پویا

مقدمه

مسأله تخصیص ترافیک چگونگی توزیع جریان ترافیک را در کمانهای یک شبکه حمل و نقل تعیین می‌کند. در ادبیات تخصیص ترافیک مادامی که برای جریان ترافیک عبوری از کمانها و گره‌های شبکه محدودیت ظرفیتی در نظرگرفته نشود روشهای کارایی برای حل این مساله ارایه شده است. ولی در حالت کلی، کمانها و گرههای شبکه دارای ظرفیت محدودی هستند که با رسیدن جریان ترافیک به این ظرفیتها صف وسایل نقلیه تشکیل می‌شود. از اینرو در نظرگیری محدودیت ظرفیت گرهها و کمانهای شبکه سبب بهبود نتایج مسأله تخصیص ترافیک می‌گردد. ولی اضافه شدن محدودیتهای جانبی به مسأله تخصیص ترافیک سبب از بین رفتن کارایی روشهای حلی نظیر فرانک –ولف [۹] می‌گردد. زیرا در این روشها زیر مسأله خطی شده معادل یافتن کوتاهترین مسیر بین هر مبدأ- مقصد است در حالی که اضافه شدن محدودیتهای جانبی به مساله تخصیص ترافیک سبب تبدیل این مساله به یک مساله جریان چند کالایی با هزینه کمینه می‌گردد که حل آن در مقایسه با مساله کوتاهترین مسیر بسیار دشوار است.

محدودیت ظرفیت کمان حالت خاصی از محدودیتهای جانبی است که تا کنون بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. روشهای ارایه شده برای حل این مسأله با هدف پرهیز از حل مسأله جریان چند کالایی، به دو دسته تقسیم می‌شوند. دسته اول از توابع زمان سفر مجانبی استفاده می‌کنند و دسته دوم با استفاده از روش جریمه/ضرایب لاگرانژ مسأله اصلی را به دنباله‌ای از مسأله‌های تخصیص ترافیک بدون محدودیت ظرفیت تبدیل می‌کنند. اولین بار دگنزو [۶]، با استفاده از توابع زمان سفر مجانبی، محدودیت ظرفیت کمانها را به صورت ضمنی در نظر گرفت. البته بویس و همکاران [۵]، نشان دادند این روش سبب برآورد زمان سفرهای غیرواقعی و بسیار بزرگ برای کمانهای با جریان ترافیک نزدیک ظرفیت می‌گردد. همچنین ، در نزدیکی نقطه تعادل سبب جابجایی چرخشی مسیرهای با جریان مثبت و بروز مشکلات عددی در حل مسأله می‌گردد.

در روشهای نوع دوم، محدودیت ظرفیت کمان با استفاده از تابع جریمه یا ضرایب لاگرانژ آزاد و به تابع هدف منتقل می‌شود. از معمولترین روشهای نوع

---

[۱] استاد

[۲] دانشجوی دکتری

[۳] استادیار

دوم می‌توان به روش ارایه شده توسط اینویه [۸] بنام تابع جریمه داخلی[۱] (IPF) و روش ضرایب لاگرانژ افزایشی[۲] (ALM) که توسط هیرن و ریبرا [۷] ارایه شده است اشاره نمود. نی و همکاران [۱۱]، ضمن مقایسه دو روش IPF و ALM نشان دادند که روش IPF برای همه مثالها قادر به دستیابی به جواب امکان پذیر بوده است در حالی که در روش ALM ممکن است جوابهای غیر امکان پذیر نیز بدست آید. در مقابل، زمان حل مساله در روش IPF به دلیل در نظرگیری شرایط امکان پذیری جواب در هر تکرار بزرگتر از روش ALM است و اختلاف زمان حل با بزرگ شدن ابعاد شبکه افزایش می یابد. آنها نتیجه گرفتند که برای حل شبکه‌های واقعی روش IPF کاربردی نیست و بهتر است با قبول دستیابی به جوابهایی با اندکی عدم امکان پذیری از روش ALM استفاده گردد.

بتازگی آشتیانی و همکاران [۱۲] روش تکراری تابع جریمه دینامیکی[۳] (DPF) را برای حل مساله تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت کمانها ارایه کردند. در این روش محدودیت ظرفیت کمانها از طریق اضافه نمودن توابع جریمه به زمان سفر کمانها بصورت ضمنی در نظر گرفته شده است. سپس در هر تکرار این روش، مساله تخصیص ترافیک با محدودیت جانبی به یک مساله تخصیص تکمیلی بدون محدودیتهای جانبی با توابع زمان سفر عمومی تبدیل و با استفاده از روش خطی سازی حل می‌شود. آنها این روش را برای چند شبکه شناخته شده بکار برده‌اند و نتایج را با نتایج نی و همکاران مقایسه کرده‌اند. مشاهده شده است روش DPF نسبت به دو روش ALM و IPF از زمان همگرایی کمتری برخوردار است و به جوابی امکان پذیر با مقدار تابع هدف بکمن [۳] بهتری دست پیدا می‌کند.

اگرچه مطالعات مختلفی برای حل مساله تخصیص ترافیک با در نظرگیری محدودیت ظرفیت کمانها ارایه شده است ولی محدودیت ظرفیت گره تا کنون کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در حالی که تقاطعهای شبکه دارای ظرفیت محدودی هستند و مجموع جریان ترافیک ورودی به آنها از مقدار مشخصی نمی‌تواند بیشتر شود. در این مقاله، روش تکراری DPF برای حل مسأله تخصیص ترافیک با در نظرگیری محدودیت ظرفیت گره توسعه داده شده است. در این روش توابع جریمه دارای ساختاری مشخص با ویژگی‌های خاص هستند که بعد از هر تکرار روش حل به صورت پویا بر اساس نتایج تکرار قبل بهنگام می‌شوند. همچنین به دلیل استفاده از مدل تکمیلی غیر خطی می‌توان از توابع زمان سفر و محدودیتهای جانبی غیر متقارن استفاده نمود. همچنین نتایج کاربرد این روش برای چند شبکه با ابعاد مختلف و شبکه واقعی شهر مشهد بکار برده شده است.

فرمولبندی مساله

یک شبکه ترافیکی را به صورت گراف G(I,A) با مجموعه گره‌های I و مجموعه کمانهای A در نظر بگیرید، که در آن هر کمان a دارای یک تابع زمان سفر $t_a(\cdot)$ است. فرض کنید R و S به ترتیب مجموعه گره‌های مبدأ و مقصد در I هستند و تقاضای سفر از هر مبدأ r به هر مقصد s مقدار ثابت q_{rs} است. شبکه G را قویاً متصل در نظر بگیرید و K_{rs} را مجموعه مسیرهای از مبدأ r به مقصد s بنامید. به علاوه، فرض کنید x_a جریان کمان a، f_k^{rs} جریان مسیر k از مبدأ r به مقصد s، و $x=(x_a)$ و $f=(f_k^{rs})$ به ترتیب بردارهای جریان کمان و مسیر هستند. در شرایطی که زمان سفر هر کمان a تنها تابعی از جریان در خودش به صورت $t_a(x_a)$ باشد، مساله تخصیص ترافیک با محدودیت‌های جانبی[۴] (SCTAP) به صورت مساله بهینه سازی غیرخطی زیر قابل بیان است: [SCTAP]

$$\text{Min}\ \ z(x)=\sum_{a\in A}\int_{0}^{x_a} t_a(w)dw \tag{۱}$$

$$\text{s. t.}\quad \sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}=q_{rs} \qquad \forall r\in R,\ s\in S \tag{۲}$$

$$f_k^{rs}\geq 0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R,\ s\in S \tag{۳}$$

$$x_a=\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \quad \forall a\in A \tag{۴}$$

$$g_j(x)\leq 1 \qquad \forall j\in J \tag{۵}$$

که در آن $z(\cdot)$ تابع هدف، و δ_{ak}^{rs} برابر یک است اگر کمان a روی مسیر k از مبدأ r به مقصد s باشد و در غیر اینصورت صفر است. $g_j(\cdot)$ نیز تابع محدودیت جانبی j و J مجموعه‌ای از اعضای شبکه نظیر کمانها، گره‌ها، مسیرها یا ترکیبی از آنها است که دارای نوعی محدودیت هستند. فرض می‌کنیم که [SCTAP] دارای جواب امکان پذیر است. با این فرض که $t_a:[0,\infty)\rightarrow(0,\infty)$ پیوسته، مثبت، و اکیداً صعودی، و $g_j:[0,\infty)^{|A|}\rightarrow(-\infty,\infty)$ پیوسته مشتق‌پذیر، یکنوا، و محدب باشد، [SCTAP] یک مساله بهینه سازی محدب خواهد بود. اگر u_{rs} و λ_j را به ترتیب ضرایب لاگرانژ محدودیتهای (۲) و (۵) در نظر بگیریم و تعریف کنیم $u=(u_{rs})$ و $\lambda=(\lambda_j)$ آنگاه شرایط بهینگی مرتبه اول KKT برای [SCTAP] بصورت زیر بیان می‌شوند:

---

۱ Inner Penalty Function: IPF

۲ Augmented Lagrangian Multiplier: ALM

۳ Dynamic Penalty Function: DPF

٤ Side Constraints Traffic Assignment Problem

$$(\sum_{a\in A}(t_a(x_a)+\sum_{j\in J}\lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a})\delta_{ak}^{rs}-u_{rs})f_k^{rs}=0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۶}$$

$$\sum_{a\in A}(t_a(x_a)+\sum_{j\in J}\lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a})\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}\ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۷}$$

$$f_k^{rs}\ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۸}$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}=q_{rs} \qquad \forall r\in R, s\in S \tag{۹}$$

$$x_a=\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \qquad \forall a\in A \tag{۱۰}$$

$$(g_j(x)-1)\lambda_j=0 \qquad \forall j\in J \tag{۱۱}$$

$$g_j(x)-1\le 0 \qquad \forall j\in J \tag{۱۲}$$

$$\lambda_j\ge 0 \qquad \forall j\in J \tag{۱۳}$$

که در آن روابط (۶) و (۷) بیان کننده اصل تعادل واردراپ [۱۰] با در نظرگیری زمان سفر تعمیم یافته هر مسیر k به شکل رابطه زیر هستند:

$$c_k^{rs}(x,\lambda)=\sum_{a\in A}(t_a(x_a)+\sum_{j\in J}\lambda_j \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a})\delta_{ak}^{rs} \tag{۱۴}$$

به عبارت دیگر، برای هر (f,u,x,λ) که در شرایط (۶) تا (۱۳) صدق کند، زمان سفر تعمیم یافته $c_k^{rs}(x,\lambda)$ برای هر مسیر $k\in K_{rs}$ با $f_k>0$ برابر است با $u_{rs}=\text{Min}_{k\in K_{rs}}\{c_k^{rs}(x,\lambda)\}$. در واقع رابطه (۱۴) زمان سفر تعمیم یافته هر مسیر است که برابر مجموع زمان سفرها و تاخیرهای صف ناشی از محدودیت های جانبی در کمانهای روی آن مسیر است. برای هر $j\in J$، فرض کنید تابع $p_j(\cdot,\alpha_j):[0,\infty)^{|A|}\to[0,\infty)$ برای هر $\alpha_j>0$ تعریف شده است و قرار دهید $\alpha=(\alpha_j)$ و $p(\cdot,\alpha)=(p_j(\cdot,\alpha_j))$. روش این مقاله برای حل مساله [SCTAP] روشی تقریبی مبتنی بر اضافه کردن جریمه $\sum_{j\in J} p_j(x,\alpha_j)\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a}$ به زمان سفر هر کمان a است، به طوری که اولاً تابع جریمه $p_j(\cdot,\cdot)$ نقش ضریب لاگرانژ λ_j را در مساله بازی کنند و ثانیاً اعمال این جریمه‌ها موجب رعایت ضمنی شرایط (۱۱) تا (۱۳) شود. این خصوصیات منجر به فرض زیر می‌شود:

فرض ۱. تابع جریمه $p_j(x,\alpha_j)$ به ازای هر $\alpha_j>0$ دارای ویژگیهای زیر است :

(a) پیوسته مشتق پذیر، غیر منفی و یکنوا است،

(b) برای $g_j(x)=1$ برابر α_j است،

(c) برای $g_j(x)>1$ بقدر کافی بزرگ است، و

(d) برای $g_j(x)<1$ بقدر کافی کوچک است.

جایگزینی $p_j(x,\alpha_j)$ به جای λ_j و نیز حذف (۱۱) تا (۱۳)، مدل آزاد شده زیر را نتیجه می‌دهد: [RSCTAP]

$$(\sum_{a\in A}(t_a(x)+\sum_{j\in J}p_j(x,\alpha_j)\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a})\delta_{ak}^{rs}-u_{rs})f_k^{rs}=0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۱۵}$$

$$\sum_{a\in A}(t_a(x)+\sum_{j\in J}p_j(x,\alpha_j)\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a})\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}\ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۱۶}$$

$$f_k^{rs}\ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۱۷}$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}=q_{rs} \qquad \forall r\in R, s\in S \tag{۱۸}$$

$$x_a=\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \qquad \forall a\in A \tag{۱۹}$$

در مسایل عملی، ناگزیریم تابع جریمه $p_j(x,\alpha_j)$ را با تقریبی از تعریف حدی اخیر انتخاب کنیم. یک انتخاب برای این تابع به صورت زیر است:

$$p_j(x,\alpha_j)=\alpha_j\psi(g_j(x)) \tag{۲۰}$$

که در آن $\psi(\cdot)$ برای هر پارامتر $0<\rho<1$ طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(y):=\begin{cases}\dfrac{\rho}{2(1-y)} & y<1-\rho\\[2mm] \dfrac{y-1}{2\rho}+1 & y\ge 1-\rho\end{cases} \tag{۲۱}$$

واضح است که $\psi\ [-\infty,\infty)\to(0,\infty)$ مثبت، صعودی، و پیوسته مشتق پذیر است، و نیز $\psi(1)=1$. به علاوه، برای $\rho\to 0$ شرایط (c) و (d) فرض ۱ به تعریف حدی خود نیز میل می‌کنند.

روش حل

روش این مقاله برای حل مساله [SCTAP] حل مساله [RSCTAP] با استفاده از تابع جریمه $p_j(x,\alpha_j)$ طبق رابطه (۲۰) است. از آنجا که تعریف این تابع به مقدار α_j وابسته است، در این بخش یک روش تکراری با تصحیح α به صورت

$$\alpha_j^n = p_j(x^n,\alpha_j^{n-1}) = \alpha_j^{n-1}\psi(g_j(x^n)) \tag{۲۲}$$

برای حل مساله [RECTAP] ارایه می‌شود، که در آن x^n جواب بدست آمده برای مساله در تکرار n به ازای مقدار α^{n-1} است. بـه عبـارت دیگـر، تابع جریمه p_j یک نوع تابع جریمه پویا است که در آن مقدار p_j در تکرار $n+1$ نسبت به تکرار n افـزایش مـی‌یابـد اگـر $g_j(x^n)>1$ باشـد و کاهش می‌یابد اگر $g_j(x^n)<1$ باشد. بدین ترتیب، شرایط (c) و (d) فرض ۱ با افزایش تکرار به تعریف حدی خود نزدیکتـر و در نتیجـه p_j نیـز بـه سمت ضریب لاگرانژ λ_j میل می‌کند. روش حل در تکرار n متوقف می‌شود اگر (۱۱) و (۱۲) به ازای $\lambda=\alpha^n$ با تقریب خوبی برقرار باشند. شـرایط توقف اخیر را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$g_j(x^n)\le 1 \qquad \forall j\in J \tag{۲۳}$$

$$(1-g_j(x^n))\alpha_j^n \le \alpha_j^\circ \rho \qquad \forall\ j\in J: g_j(x^n)<1-\rho \tag{۲۴}$$

که در آن α_j° مقدار اولیه ضریب لاگرانژ محدودیت جانبی $j\in J$ است. بدیهی اسـت کـه اگـر $\rho\to\circ$ آنگـاه x^n بـه سـمت جـواب بهینـه مـساله [SCTAP] میل می‌کند. به علاوه، شرط (۲۳) تضمین می‌کند که x^n همواره یک جواب امکانپذیر برای مساله اخیر باشد. نکته شایان توجـه در روش حل پیشنهادی آن است که مساله [RSCTAP] برای هر $\alpha>\circ$ خود یک مساله تخصیص ترافیک بدون محدودیتهای جانبی بـا زمـان سـفر تعمـیم یافته کمانها به صورت

$$\bar{t}_a(x) = t_a(x_a) + \sum_{i\in J} p_j(x,\alpha_j)\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_a} \tag{۲۵}$$

می‌باشد که، با استفاده از فرض مثبت بودن تابع $\bar{t}_a(\cdot)$ ، قابل تبدیل به یک مدل تکمیلی غیرخطی بر حسب جریان در مسیرها اسـت (آشـتیانی ۱۹۷۹ ملاحظه شود). به طور دقیقتر، اگر جریان کمان a به صورت

$$x_a(f) := \sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs} \tag{۲۶}$$

و زمان سفر تعمیم یافته مسیر k به صورت

$$c_k^{rs}(f,\alpha) := \sum_{a\in A}(t_a(x_a(f)) + \sum_{j\in J} p_j(x(f),\alpha_j)\frac{\partial g_j(x(f))}{\partial x_a})\delta_{ak}^{rs} \tag{۲۷}$$

تعریف شوند، مدل تکمیلی اخیر به صورت زیر قابل بیان است: [NCP(α)]

$$(c_k^{rs}(f,\alpha)-u_{rs})f_k^{rs} = \circ \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۲۸}$$

$$c_k^{rs}(f,\alpha)-u_{rs} \ge \circ \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۲۹}$$

$$f_k^{rs} \ge \circ \qquad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \tag{۳۰}$$

$$(\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs})\ u_{rs} = \circ \qquad \forall r\in R, s\in S \tag{۳۱}$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} - q_{rs} \ge \circ \qquad \forall r\in R, s\in S \tag{۳۲}$$

$$u_{rs} \ge \circ \qquad \forall r\in R, s\in S \tag{۳۳}$$

در صورتیکه تابع $\partial g_j(\cdot)/\partial x_a$ پیوسته مشتق پذیر، غیرمنفی و یکنوا باشد، آنگاه برای هر α غیر منفی $c_k^{rs}(\cdot,\alpha)$ مثبـت، پیوسـته مـشتق پـذیر و اکیداً یکنوا خواهد بود. همچنین این خصوصیت حتی اگر زمان سفر کمانها توسط توابعی پیوسته مشتق پذیر، مثبت و اکیداً یکنوا از بردار جریـان کمـان به صورت $t_a(x)$ نیز بیان شوند وجود خواهد داشت. در این صورت مدل تکمیلی [NCP(α)] دارای جواب یگانه (x,u) است. یک شرط کافی بـرای یکنوایی $\partial g_j(\cdot)/\partial x_a$ آن است که $g_j(\cdot)$ خطی باشد.

حل مستقیم مدلهای تکمیلی تخصیص ترافیک (بدون محدودیتهای جانبی) در کاربردهای عملی به علت تعداد زیاد متغیرها و غیر خطی بودن آن شدیداً زمانبر و عملاً غیر ممکن است. آشتیانی [۱] روشی تکراری به نام روش خطی سازی را برای حل این نوع مدل معرفی کـرده اسـت. بـه عـلاوه، بابـازاده و آشتیانی [۲] نشان دادند که این روش خطی سازی برای حل مسئله تخصیص مسافر در سیستمهای همگانی متراکم نیز قابل تعمیم است.

در این مقاله مدل تکمیلی [NCP(α)] برای هر $\alpha\ge\circ$ توسط روش خطی سازی آشتیانی حل می‌شود. در هر تکرار این روش، با تجزیه متغیرهای f و u روی زوجهای مبدأ- مقصد، زیرمساله محدود شده‌ای از مساله اصلی به نام [NCP$_{rs}$(α)] برای هر زوج مبدأ- مقصد (r,s) حاصل مـی‌شـود کـه تنها شامل متغیرهای $f^{rs}=(f_k^{rs})_{k\in K_{rs}}$ و u_{rs} است و متغیرهای مربوط به سایر زوجهای مبدأ- مقصد در مقدار فعلی آنها ثابت نگهداشته می‌شـوند.

در هر تکرار روش حل، پس از حل تمام زیر مسایل و تعیین (f^{rs},u_{rs}) برای هر زوج (r,s) یک جواب (f,u) برای مساله اصلی در آن تکرار بدست می‌آید. روش حل تکرار می‌شود تا وقتیکه (f,u) با تقریب مناسبی در شرایط (۲۸) و (۲۹) صدق کند.

در روش خطی سازی، همچنین، از تکنیک تولید مسیر برای کاهش ابعاد زیرمسایل استفاده می‌شود. در این تکنیک، جواب (f^{rs},u_{rs}) مربوط به هر زوج مبدأ- مقصد (r,s) توسط حل زیر مساله مربوط به آن برای یک مجموعه مسیرهای فعال $K_{rs}^{w}\subseteq K_{rs}$ بدست می‌آید. در اینصورت، هر چه تعداد مسیرهای در K_{rs}^{w} کمتر باشد ابعاد زیرمساله کوچکتر و در نتیجه حل آن ساده تر خواهد بود. مجموعه مسیرهای فعال هر زوج مبدأ- مقصد در شروع روش حل برابر تهی هستند و سپس در هر تکرار بهنگام می‌شوند. به منظور انجام این کار، برای هر زوج (r,s)، کوتاهترین مسیر از r به s بر اساس زمانهای فعلی $\bar{t}_a(x(f))$ تعیین، و اگر شرط

$$(\min_{k\in K_{rs}^{w}} c_k^{rs}(f,\alpha)-u_{rs})/u_{rs}\le\varepsilon \tag{۳۴}$$

برقرار نبود آن مسیر به مجموعه K_{rs}^{w} اضافه می‌شود. در رابطه بالا u_{rs} طول کوتاهترین مسیر از r به s، و $\varepsilon\ge 0$ دقت رسیدن به شرایط توقف است. به منظور کاهش تعداد دفعات محاسبه کوتاهترین مسیرها در این روش، در هر تکرار یک درخت کوتاهترین مسیر با ریشه r برای هر $r\in R$ محاسبه می‌شود.

هر چند با استفاده از تکنیک های تجزیه و تولید مسیر ابعاد زیرمسایل $[\mathrm{NCP}_{rs}(\alpha)]$ بسیار کوچکتر از مساله اصلی $[\mathrm{NCP}(\alpha)]$ خواهند شد، ولی به دلیل غیر خطی بودن $c_k^{rs}(\cdot,\alpha)$ حل آن توسط روشهای حل عمومی تکمیلی غیر خطی بسیار مشکل است. آشتیانی برای حل این مشکل از خطی سازی تکراری استفاده نموده است. در هر تکرار خطی‌سازی زیرمساله $[\mathrm{NCP}_{rs}(\alpha)]$ در جواب فعلی $\bar{f}$ خطی سازی و حل می‌گردد. زیر مساله خطی شده شامل شرایط زیر است:

$$(c_k^{rs}(\bar{f},\alpha)+\sum_{k'\in K_{rs}^{w}}[(f_{k'}-\bar{f}_{k'})\frac{\partial c_k^{rs}(\bar{f},\alpha)}{\partial f_{k'}}]-u_{rs})\,f_k^{rs}=0 \qquad \forall k\in K_{rs}^{w} \tag{۳۵}$$

$$c_k^{rs}(\bar{f},\alpha)+\sum_{k'\in K_{rs}^{w}}[(f_{k'}-\bar{f}_{k'})\frac{\partial c_k^{rs}(\bar{f},\alpha)}{\partial f_{k'}}]-u_{rs}\ge 0 \qquad \forall k\in K_{rs}^{w} \tag{۳۶}$$

که نسخه خطی شده شرایط (۲۸) و (۲۹) برای مجموعه مسیرهای فعال K_{rs}^{w} هستند. شرط توقف خطی سازی به صورت زیر است:

$$(\max_{k\in K_{rs}^{w}:\bar{f}_k>0} c_k^{rs}(f,\alpha)-u_{rs})\Big/\max_{k\in K_{rs}^{w}:\bar{f}_k>0} c_k^{rs}(f,\alpha)\ \le\ \varepsilon \tag{۳۷}$$

با برقراری رابطه فوق یک جواب (f^{rs},u_{rs}) با تقریب ε برای مبدأ- مقصد (r,s) بدست می‌آید.

پس حل زیرمسایل مربوط به همه زوجهای مبدأ-مقصد، یک تکرار روش حل با تعیین یک جواب (f,u) به پایان می‌رسد. روش حل در پایان یک تکرار متوقف می‌شود اگر متوسط خطای جواب بدست آمده در آن تکرار کوچکتر یا مساوی ε باشد، یا

$$(\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}q^{rs}\varepsilon^{rs})\Big/\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}q^{rs}\le\varepsilon \tag{۳۸}$$

که در آن ε_{rs} خطای مبدأ- مقصد (r,s) است و طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^{rs}:=|\,\underset{k\in K_{rs}^{w}:\bar{f}_k>0}{Max}\ c_k^{rs}(f,\alpha)-u_{rs}\,|\Big/u_{rs} \tag{۳۹}$$

روش پیشنهادی این مقاله برای حل [SCTAP] با دقت ρ مشابه روش خطی سازی آشتیانی برای حل $[\mathrm{NCP}(\alpha)]$ است، با این تفاوت که پارامترهای α_j (که در این روش همان ضرایب لاگرانژ λ_j هستند) از یک مقدار اولیه شروع و در هر تکرار طبق رابطه (۲۰) به طور پویا بهنگام می‌شوند. این روش در ادامه روش تابع جریمه دینامیکی (DPF) نامیده می‌شود. بیان رسمی روش DPF به صورت زیر است:

گام ۱ (مقدار دهی اولیه)

- ۱-۱- مقادیر مثبت ε و ρ و یک بردار λ^{0} مثبت را انتخاب کنید.
- ۱-۲- برای هر زوج مبدأ- مقصد (r,s) قرار دهید $K_{rs}^{w}=\phi$.
- ۱-۳- قرار دهید $f=0$ ، $x^{0}=x(f)$، و $n=0$.

گام ۲ (انجام یک تکرار روش خطی سازی)

- ۲-۱- قرار دهید $n=n+1$.
- ۲-۲- برای هر مبدأ $r\in R$ انجام دهید:
  - ۲-۲-۱- کوتاهترین مسیر k_{rs} از مبدأ r به هر مقصد $s\in S$ را بر اساس زمانهای $\bar{t}_a(x^{n-1})$ بیابید. فرض کنید u_{rs} زمان کوتاهترین مسیر به مقصد s است.
  - ۲-۲-۲- برای هر مبدأ $s\in S$ انجام دهید:

۲-۲-۲-۱- اگر شرط (۳۴) برای $\alpha = \lambda^{n-1}$ برقرار نیست قرار دهید $K_{rs}^{w} = K_{rs}^{w} \cup \{k_{rs}\}$ و $f_{k_{rs}} = 0$.

۲-۲-۲-۲- قرار دهید $\bar{f}_k = f_k$ برای $k \in K_{rs}^{w}$.

۲-۲-۲-۳- مساله $[\mathrm{NCP}_{rs}(\lambda^{n-1})]$ را در نقطه $\bar{f}$ خطی‌سازی و (f^{rs}, u_{rs}) را بدست آورید.

۲-۲-۲-۴- اگر شرط (۳۷) برای $\alpha = \lambda^{n-1}$ برقرار نیست به گام۲-۲-۲-۲ بروید.

۲-۲-۲-۵- مقدار ε^{rs} را از رابطه (۳۹) برای $\alpha = \lambda^{n-1}$ محاسبه کنید.

گام ۳ (بهنگام سازی)

۳-۱- قرار دهید $x^n = x(f)$ و $\lambda^n = p(x^n, \lambda^{n-1})$.

گام ۴ (آزمون همگرایی)

۴-۱- اگر شرط (۳۸) برقرار نیست به گام ۲ بروید.

۴-۲- اگر شرایط (۲۳) و (۲۴) برای $\alpha^{\circ} = \lambda^{\circ}$ و $\alpha = \lambda^n$ برقرار است توقف کنید، وگرنه به گام ۲ بروید.

در کاربرد روش پیشنهادی می‌توان از مکانیزم‌هایی برای افزایش کارایی آن استفاده نمود. از آن جمله، میتوان مقادیر پارامترهای مربوط به دقت جواب یعنی ε و ρ را در تکرارهای اولیه مقادیر بزرگتری در نظرگرفت و به تدریج آنها را کاهش داد. هر چند در این مقاله اثباتی برای همگرایی روش DPF ارایه نمی‌شود، ولی نتایج کاربرد آن برای شبکه‌هایی با ابعاد مختلف و برای دو نوع محدودیت جانبی نشان از همگرایی خوب آن دارند.

محدویت ظرفیت گره

بل [۴] عملکرد چراغهای راهنمایی هوشمند را در هر تقاطع (گره) i، با این فرض که زمان سبز هر فاز تابعی از کل جریان ورودی به تقاطع است، به وسیله محدودیت زیر مدل کرد:

$$\sum_{a:e(a)=i} \frac{x_a}{s_a} \le 1 - \frac{w}{c} \qquad (۴۰)$$

که در آن $e(a)$ گره انتهایی کمان a، s_a جریان اشباع کمان a و $\frac{w}{c}$ نسبت زمان تلف شده به طول سیکل چراغ است. فرض کنید $\bar{I} \subseteq I$ مجموعه گره‌های با ظرفیت محدود برای جریانهای ورودی است. با تعریف $J := \bar{I}$، و استفاده از رابطه (۴۰) برای $w = 0$، محدودیت جانبی (1e) را می‌توان صورت زیر بازنویسی نمود:

$$g_i(x) = \sum_{a:e(a)=i} \frac{x_a}{s_a} \le 1 \qquad i \in \bar{I} \qquad (۴۱)$$

در اینصورت زمان سفر تعمیم یافته هر مسیر k برای استفاده در مساله $[\mathrm{NCP}(\alpha)]$ به صورت

$$c_k^{rs}(f,\alpha) := \sum_{a \in A} \left(t_a(x_a(f))\delta_{ak}^{rs} + \sum_{a:e(a)\in \bar{I}} (p_{e(a)}(x(f),\alpha_{e(a)})/s_a)\right)\delta_{ak}^{rs} \qquad (۴۲)$$

تعریف میشود که در آن

$$p_i(x,\alpha_i) = \alpha_i \psi\left(\sum_{a:e(a)=i} \frac{x_a}{s_a}\right) \qquad (۴۳)$$

تابع جریمه مربوط به هر $i \in \bar{I}$ است. در این حالت، $[\mathrm{NCP}(\alpha)]$ برای هر $\alpha > 0$ یک مسئله تخصیص ترافیک بدون محدودیتهای جانبی با توابع زمان سفر تعمیم یافته به صورت زیر خواهد بود.

$$\bar{t}_a(x) = \begin{cases} t_a(x_a) + p_{e(a)}(x,\alpha_{e(a)})/s_a & \text{if } \; e(a) \in \bar{I} \\ t_a(x_a) & \text{if } \; e(a) \in I \setminus \bar{I} \end{cases} \qquad (۴۴)$$

در حالت عمومی تابع $\bar{t}_a$ نامتقارن و به جریان ترافیک در سایر کمانها وابسته است. اگرچه در این حالت $[\mathrm{NCP}(\alpha)]$ را نمی‌توان به صورت یک مسأله بهینه سازی بیان نمود ولی صورت تکمیلی این مسئله امکان استفاده از روشهای تکمیلی غیرخطی مانند روش خطی‌سازی آشتیانی را فراهم مینماید.

نتایج عددی

در این بخش کارایی روش حل پیشنهادی DPF برای حل مساله تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت گره ارایه شده است. روش DPF در محیط VISUAL C++ پیاده سازی و روی رایانه‌ای با قدرت پردازش 1/8 GHz و حافظه ۵۱۲ SDRAM اجرا شده است. جدول (۱) مشخصات شبکه‌های آزمایش شده را نشان می‌دهد. تابع زمان سفر کمانها در تمام شبکه‌های آزمایشی تابع BPR با ضریب ۰/۱۵ و درجه ۴ است. به علاوه، در تمام اجراها ε برابر ۰/۰۰۱ در نظرگرفته شده است. مقدار اولیه بردار λ° برای محدودیت ظرفیت گره‌ها $\lambda_i^{\circ} = (0.1t^{\circ})(\sum_{a:e(a)=i} s_a)$ در

نظرگرفته شده است. که در آن t° متوسط زمان سفر آزاد کمانهای شبکه است.

جدول(۱). مشخصات شبکه های آزمایش شده

شبکه	تعداد گره	تعداد کمان	تعداد مبدا – مقصد
۹ گره ای	۹	۱۸	۴
سایوکس فالز	۲۴	۷۶	۵۲۸
آناهیم	۴۱۶	۹۱۴	۱۴۰۶

روش DPF برای در نظرگیری محدودیت ظرفیت گره برای شبکه‌های ۹ گره‌ای، سایوکس فالز و آناهیم بکار برده شد. در این شبکه‌ها نرخ تـردد اشـباع کمانها برای استفاده در محدودیت جانبی ظرفیت گره برابر ضریبی از ظرفیت کمانها در نظر گرفته شد. به منظور امکان پذیر نگه داشتن مسایل و تعـداد گره‌های اشباع بیشتر، مقدار این ضریب برای شبکه‌های ۹ گره‌ای، سایوکس فالز و آناهیم به ترتیب برابر ۲، ۲/۸ و ۱/۷۵ در نظرگرفته شد. خلاصه نتـایج کاربرد روش DPF برای مقادیر مختلف پارامتر ρ در این شبکه‌ها در جدول (۲) آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در تمام شبکه‌هـا بـا کـاهش پارامتر ρ مقدار تابع هدف کاهش می‌یابد. بطور مثال برای شبکه ۹ گره‌ای که تابع هدف بهینه آن بـا اسـتفاده از نـرم افـزار GAMS برابـر ۱۴۱۰/۳۰ است، از درصد خطای جواب نسبت به تابع هدف بهینه کاسته می‌شود. در مقابل تعداد تکرارها و زمان حل افـزایش یافتـه اسـت. همچنـین روش DPF برای تمام شبکه‌ها به جوابی امکان پذیر همگرا شده است که در این جواب برای شبکه‌های ۹ گره‌ای، سایوکس فالز و آناهیم بـه ترتیـب ۴، ۱۳ و ۸ گـره اشباع وجود دارد. شکل (۱) تغییرات تابع هدف و حداکثر مقدار تابع محـدودیت ظرفیـت گـره ($\underset{i\in I}{Max}\ g_i(x)$) را در اجـرای روش DPF بـرای شـبکه سایوکس فالز و مقادیر مختلف پارامتر ρ نشان می‌دهد.

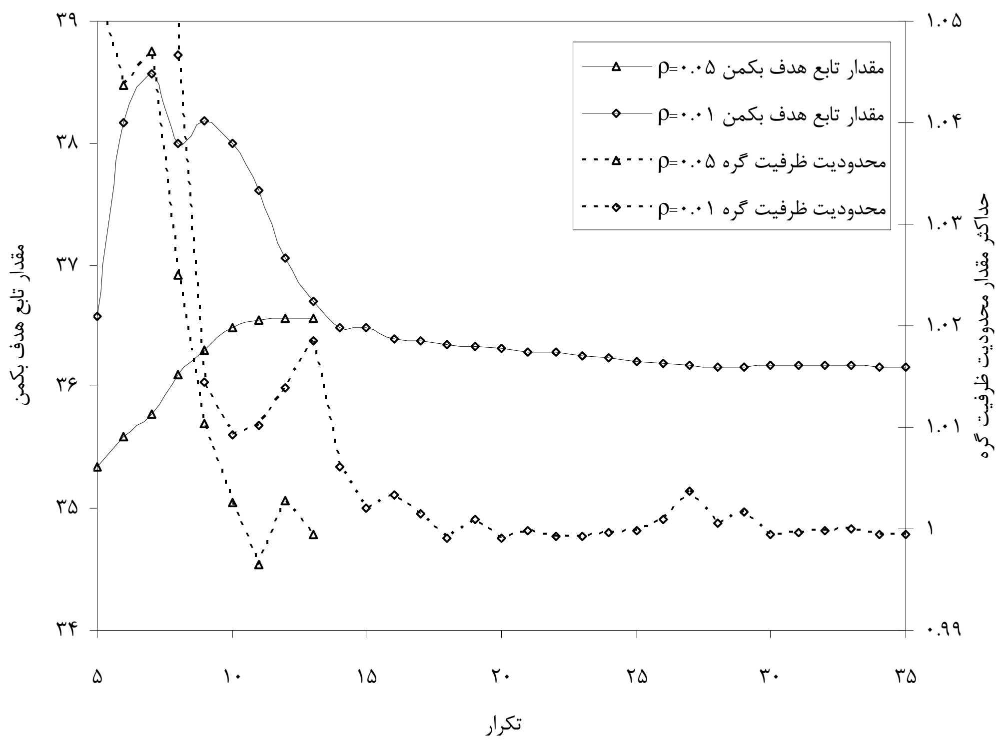
جدول (۲). خلاصه نتایج کاربرد روش DPF برای محدودیت ظرفیت گره

شبکه	پارامتر ρ	تعداد تکرار	تابع هدف	حداکثر مقدار محدودیت گره	زمان حل (ثانیه)
۹ گره‌ای	۰/۰۵	۱۷	۱۴۱۲/۴۹	۰/۹۹۹۶۰۲	–
	۰/۰۱	۲۷	۱۴۱۰/۹۵	۰/۹۹۹۷۸۸	–
سایوکس فالز	۰/۰۵	۱۳	۳۶/۵۷	۰/۹۹۹۴۳۸	۰/۱۴
	۰/۰۱	۳۵	۳۶/۱۶	۰/۹۹۹۳۶۹	۰/۳۹
آناهیم	۰/۰۵	۱۵	۱۲۰۳۴۷۹	۰/۹۹۹۹۹۷	۴/۲۳
	۰/۰۱	۳۴	۱۲۰۳۲۲۶	۰/۹۹۹۹۷۵	۸/۸۸

شکل (۱). تغییرات تابع هدف و حداکثر مقدار تابع محدودیت ظرفیت گره برای شبکه سایوکس فالز

خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش تکراری مبتنی بر تابع جریمه پویا به نام DPF برای حل مسأله تخصیص ترافیک با در نظرگیری محدودیت ظرفیـت گـره ارایـه گردید. در هر تکرار این روش، مساله تخصیص ترافیک با محدودیت جانبی به یک مساله تکمیلی غیر خطی بدون محدودیتهای جانبی با توابع زمان سفر عمومی تبدیل و با استفاده از روش خطی سازی آشتیانی حل می‌شود. روشDPF برای شبکه‌های ۹ گره‌ای، سایوکس فـالز و آنـاهیم آزمـایش شـد کـه نتایج آنها نشان از خصوصیات همگرایی خوب این روش داشت. با استفاده از روش ارایه شده در این مقاله می‌توان با در نظرگیری محدودیت ظرفیت گره در مساله تخصیص ترافیک سبب افزایش دقت حل این مساله گردید.



مراجع

۱ Aashtiani H.Z. (۱۹۷۹) The Multi-Modal Traffic Assignment Problem, Ph.D. Dissertation, MIT.

۲ Babazadeh, A. and H. Z. Aashtiani, (۲۰۰۵) Algorithm for Equilibrium Transit Assignment Problem. Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board. No. ۱۹۲۳, pp. ۲۲۷-۲۳۵.

۳ Beckmann, M., C.B. McGuire, and C.B. Winsten (۱۹۵٦) Studies In The Economics of Transportation. Yale University Press, New Haven, Connecticut.

٤ Bell M.G.H. (۱۹۹٥) Stochastic User Equilibrium Assignment in Networks with Queues, Transportation Research Part B, ۲۹, pp. ۱۲٥-۱۳۷.

٥ Boyce, D., B.N. Janson and R.W. Eash (۱۹۸۱) The Effect on Equilibrium Trip Assignment of Different Link Congestion Functions. Transportation Research ۱٥A, pp. ۲۲۳–۲۳۲.

٦ Daganzo, C.F. (۱۹۷۷a,b) On The Traffic Assignment Problem with Flow Dependent Costs—I. Transportation Research ۱۱, pp. ٤۳۳–٤۳۷.

۷ Hearn, D.W. and J. Ribera (۱۹۸۰) Bounded Flow Equilibrium Problems by Penalty Methods. In: Proceedings of IEEE International Conference on Circuits and Computers, pp. ۱٦۲–۱٦٦.

۸ Inouye, H. (۱۹۸۷) Traffic Equilibria and Its Solution in Congested Road Networks. In: Genser, R. (Ed.), Proceedings of IFAC Conference on Control in Transportation Systems, pp. ۲٦۷–۲۷۲.

۹ Leblanc, L.J., E.K. Morlok and W.P. Pierskalla (۱۹۷٥) An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem. Transportation Research ۹, pp. ۳۰۹–۳۱۸.

۱۰ Wardrop, J.G. (۱۹٥۲) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. In: Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II. Vol. ۱, pp. ۳۲٥–۳۷۸.

۱۱ Nie, Y., H. M. Zhang and D. H. Lee. (۲۰۰٤) Models and Algorithms for the Traffic Assignment Problem with Link Capacity Constraints, Transportation Research ۳۸B, pp. ۲۸٥-۳۱۲.

۱۲ آشتیانی ه.ذ.، شهپر ا.، بابازاده ع.، (۱۳۸۵) حل مسأله تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت کمان با استفاده از توابع جریمه، سومین کنفرانس ملی عمران، دانشگاه تبریز.