



بررسی رفتار مواد نیمه ترد بر اساس تئوری اندوکرونیک

محمد تقی کاظمی^۱، جلال صالحی مبین^۲

۲،۱- دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

jsalehy@yahoo.com

خلاصه

در تئوری اندوکرونیک روابط ساختاری بر اساس قوانین ترمودینامیک و برگشت ناپذیری تغییرشکلهای خمیری بدست می آید. مدل‌های موجود توانایی در نظر گیری رفتار مهم بتن مانند سخت‌شوندگی، هیسترسیس و اندرکنش تنش برشی - حجمی را دارند ولی عدم در نظرگیری آسیب‌دیدگی سبب ناهمخوانی رفتار بتن و نتایج مدل تحت بارهای سیکلی می‌شود. مدل اندوکرونیک با وارد کردن پارامتر آسیب‌تعمیم داده شده و تجزیه و تحلیل رفتار بتن در مسیرهای مختلف تنش و کرنش و بارگذاری سیکلی با نتایج آزمایشگاهی موجود مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان‌دهنده آن است که این مدل قابلیت مناسبی جهت پیش‌بینی رفتار بتن دارد.

کلمات کلیدی: تئوری اندوکرونیک، مواد نیمه ترد، فضای کرنش، زمان ذاتی، پارامتر آسیب.

مقدمه

از دیدگاه یک مدل ساختاری، بتن جزو مواد با رفتار پیچیده است که تعیین روابط ساختاری آن تحت مسیرهای بارگذاری گوناگون محققین زیادی را به خود مشغول کرده است. در سالهای اخیر مدل‌های ساختاری غیرخطی گوناگونی برای تشریح رفتار بتن ساده بوجود آمده است که از آن جمله می‌توان به از انواع مدل‌های پلاستیسیته اندوکرونیک یاد کرد. این مدل اولین بار توسط والانیس و برای فلزات ارائه شد [1,2]. بازان و همکارانش با وارد کردن وابستگی پارامتر مقیاس زمان درونی به فشار هیدروستاتیک، فرمولبندی اولیه تئوری اندوکرونیک را که مناسب توصیف رفتار فلزات بود را برای مواد نیمه ترد مانند بتن، خاک و شن توسعه دادند [3,4]. در کارهای صورت گرفته توسط بازان و همکارانش، روابط تئوری به کمک مکان هندسی سختی غیر الاستیک که به صورت مکان هندسی همه نمونه‌های کرنش که مقدار نمو کرنش غیر الاستیک یکسانی را در فضای کرنش تولید کنند، بیان شد. اگرچه در مدل‌های توسعه داده شده اثر تغییرشکلهای حجمی غیرالاستیک منظور گردید ولی به علت آنکه استفاده از کرنش کل در روابط ساختاری، قوانین ترمودینامیک را نقض می‌کرد، سبب شد توسعه فرمولبندی بعدی تئوری اندوکرونیک، مناسب توصیف رفتار مواد نیمه ترد توسط والانیس صورت گیرد که در آن فقط قسمت غیرالاستیک کرنش به کار رفته بود [5]. تئوری اندوکرونیک ارائه شده توسط والانیس مدل‌سازی رفتار غیرخطی بتن در محدوده‌ای از تنشها که ترکهای مهمی در آن رخ ندهد را بیان می‌کند. این تئوری به صورت همسانگرد و مستقل از نرخ کرنش می‌باشد. هرچند مدل ارائه شده توانایی در نظرگیری پدیده‌های رفتاری مهم بتن را دارد، ولی نمی‌تواند مواردی چون رفتار بتن تحت بارهای سیکلی را در نظر بگیرد، در مطالعه حاضر ضمن معرفی روابط پایه این تئوری، با استفاده از پارامتر آسیب مناسب و لحاظ کردن آن در روابط موجود، این تئوری تعمیم داده خواهد شد و با بررسی چندین نمونه دقت آن کنترل می‌گردد.

روابط پایه تئوری پلاستیسیته اندوکرونیک

در این بخش روابط پایه مدل تئوری اندوکرونیک که بر مبنای برگشت ناپذیری ترمودینامیکی متغیرهای داخلی تدوین شده بیان می‌گردد. مدل ارائه شده برای حالت همسانگرد و مستقل از نرخ کرنش می‌باشد. این مدل تاثیر متقابل تنشهای برشی - حجمی، تاثیر فشار هیدروستاتیکی بر پاسخ برشی، سخت‌شوندگی و وابستگی به مسیر تنش را در نظر می‌گیرد. برای حالت تغییر شکل‌های هم دما، روابط حاکم بر مدل اندوکرونیک به صورت زیر بیان می‌شوند [5]:

^۱ دانشیار دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف

^۲ دانشجوی دکتری سازه و زلزله دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف



$$s = \int_0^{z_s} \rho(z_s - z') \frac{de^p}{dz'} dz' \quad (1)$$

$$\sigma = \int_0^{z_H} \varphi(z_H - z') \frac{de^p}{dz'} dz' \quad (2)$$

$$de^p = de - ds/2\mu \quad (3)$$

$$de^p = de - d\sigma/K \quad (4)$$

$$dz^2 = \|de^p\|^2 + k^2 |de^p|^2 \quad (5)$$

$$dz_s = dz/F_s, \quad dz_H = dz/kF_H \quad (6)$$

که در آن s تانسور تنش انحرافی، σ تنش هیدروستاتیک (فشاری)، e^p مولفه پلاستیک تانسور کرنش انحرافی e و ε^p مولفه پلاستیک تانسور کرنش حجمی ε است. μ و K به ترتیب بیانگر مدول برشی و حجمی هستند. ضریب k نیز اندرکرنش تغییر شکل‌های برشی - حجمی را نشان می‌دهد. F_s و F_H توابع سخت شوندگی برشی و هیدروستاتیکی می‌باشند. z پارامتر مقیاس تابع ذاتی بوده و z_s و z_H زمانهای ذاتی رفتار برشی و هیدروستاتیکی می‌باشند. در نهایت $\rho(z)$ و $\varphi(z)$ توابع تکین ضعیف کرنل هستند که شرایط $\rho(0) = \varphi(0) = \infty$ را ارضاء می‌کنند ولی در بازه $0 \leq z < \infty$ انتگرال‌پذیر هستند.

تابع F_H نشانگر تاثیر تراکم بر روی رفتار هیدروستاتیکی است و به تبع آن وابسته به کرنش حجمی پلاستیک ε^p می‌باشد. تابع F_s تاثیر فشار هیدروستاتیک و منحنی سطح گسیختگی در صفحه π بر روی پاسخ برشی را نشان می‌دهد. در محدوده تنشهای کاربردی که از سطح گسیختگی دور باشد می‌توان F_s را تنها وابسته به σ در نظر گرفت [5].

در نظرگیری توابع کرنل به صورت زیر علاوه بر آنکه سبب تطبیق خوبی با نتایج آزمایشگاهی می‌شود حل معادلات انتگرالی را نیز آسانتر می‌کند:

$$\rho(z_s) = \sum_r A_r e^{-\alpha_r z_s} \quad (7)$$

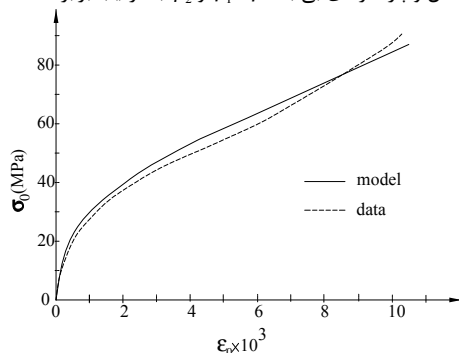
$$\varphi(z_H) = \sum_r B_r e^{-\beta_r z_H} \quad (8)$$

که در آن ثابتهای A_r ، B_r ، α_r و β_r همگی مثبت و محدود هستند و از داده‌های آزمایشگاهی بدست می‌آیند. برای این فرم از توابع می‌توان نشان داد که انتگرالهای روابط (1) و (2) قابل تبدیل به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل هستند. این نتیجه سبب سادگی زیاد محاسبات موجود در معادلات خواهد شد.

تعیین پارامترهای مدل

در این قسمت با برازش توابع ارائه شده و منحنیهای آزمایشگاهی گزارش شده توسط اسکاووزو [6] پارامترهای مدل بدست می‌آید. داده‌های آزمایشگاهی مورد نیاز شامل آزمایش هیدروستاتیک بکر، آزمایش برشی در حضور مقادیر مختلف فشار هیدروستاتیکی و شکست سه‌محوره در فشارهای محاط کننده مختلف می‌باشد.

توابع φ و F_H از آزمایش اعمال فشار هیدروستاتیک یکنوا بدست می‌آیند. پارامترهای تابع φ از روی برازش با منحنی فشار هیدروستاتیکی که در شکل (1) نشان داده شده است محاسبه می‌گردد. تخمین تابع φ با دو جمله سبب دقت کافی در محاسبات می‌شود. برای این تابع پارامترهای K ، B_1 و B_2 به ترتیب برابر ۱۴۵۸۲، ۹۱۲۸ و ۴۳۰۹۸ مگاپاسکال و پارامترهای بی بعد β_1 ، β_2 به ترتیب برابر ۰.۶۲/۸۶، ۵۳۵ و ۲۲۱۱ بدست می‌آیند.



شکل ۱ - منحنی فشار هیدروستاتیک بتن



تابع کرنل $\rho(z_s)$ نیز به فرم رابطه (۷) و کمک دو ترم بیان می‌شود که پارامترهای آن A_1 برابر 1.0140 MPa، A_2 برابر 131940 MPa، α_1 برابر 100 و α_2 برابر 6554 بدست می‌آید.

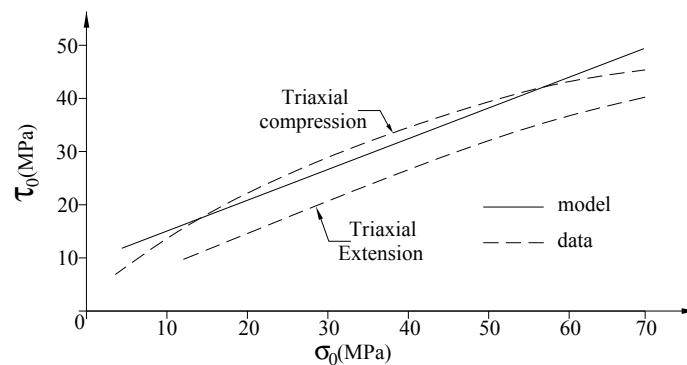
در کرنشهای کم F_H از رابطه خطی (۹) پیش‌بینی می‌شود ولی برای کرنشهای بالا تابع نمایی ارائه شده در رابطه (۱۰) همخوانی مناسبی را نشان می‌دهد.

$$F_H = (1 + \beta \varepsilon^p) \quad (9)$$

$$F_H = \begin{cases} 1 + 62.86\varepsilon^p & \varepsilon^p \leq 0.012 \\ 1.676 \cosh(-39.68\varepsilon^p) & \varepsilon^p > 0.012 \end{cases} \quad (10)$$

بنابراین تابع F_s می‌تواند از شکل (۲) بدست آید. برای این منظور منحنی شکست فشاری با یک خط تقریب زده می‌شود.

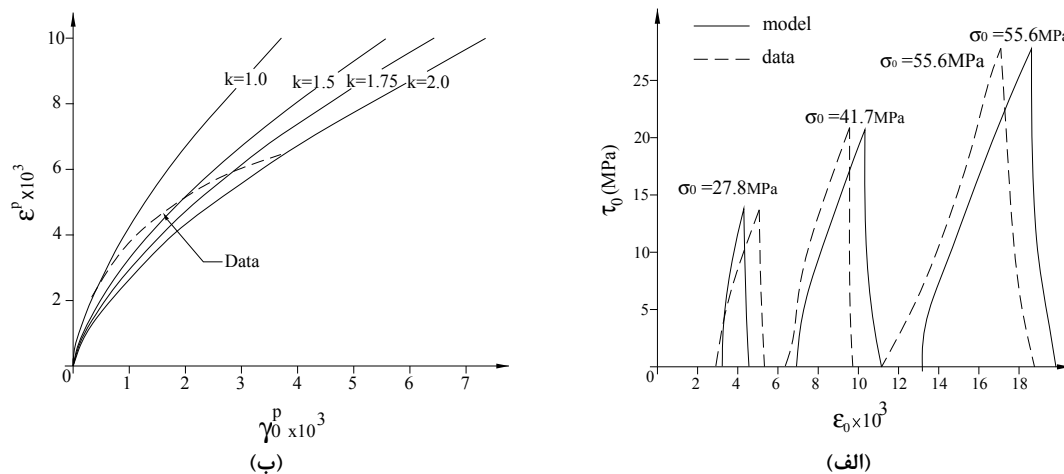
$$F_s = \delta + \eta \sigma \quad (11)$$



شکل ۲- منحنی سطح گسیختگی برشی در حضور فشار محاطی

برای مطالعه حاضر به کمک شکل (۲) δ برابر 0.33 و η برابر $11/953$ MPa⁻¹ بدست آمده است.

برای تعیین ضریب اندرکنش کرنش برشی-حجمی از شکل (۳-الف) استفاده می‌شود که بیانگر تغییرات کرنش عمودی هشت وجهی بر اساس تنش برشی هشت وجهی در طول اعمال برش در مقادیر ثابت تنش هیدروستاتیکی می‌باشد. به علت محدود بودن اطلاعات موجود فرض می‌شود که تغییرات حجمی که در طول اعمال برش و با حضور فشار هیدروستاتیکی وجود می‌آید کاملاً غیر قابل بازگشت است. بر مبنای این فرض و استفاده از نتایج مربوط به $\sigma_0 = 55.6$ MPa در شکل (۳-ب)، تغییرات کرنش پلاستیک حجمی ε^p بر اساس کرنش پلاستیک برشی هشت وجهی γ_0^p نشان داده شده است.



شکل ۳- تعیین ضریب اندرکنش کرنش برشی-حجمی

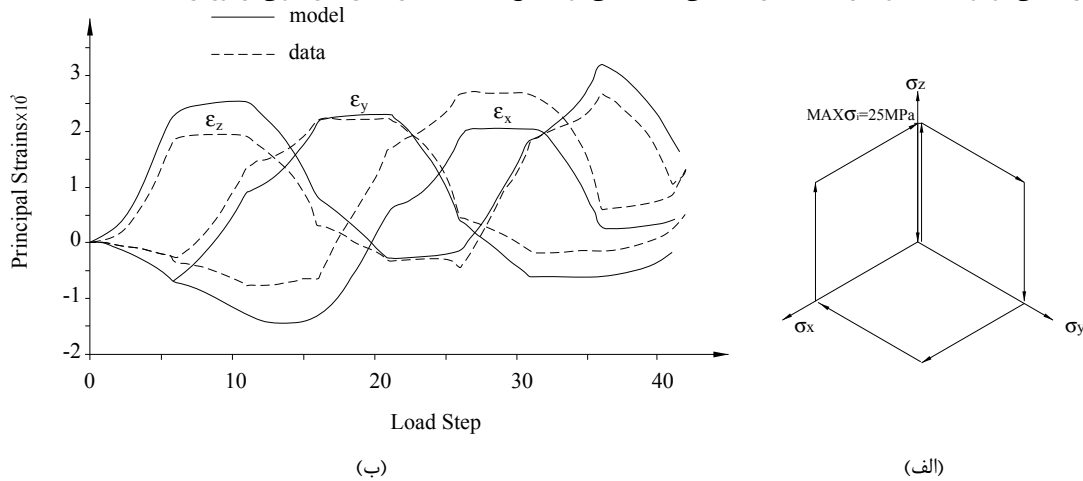
در شکل (۳-ب)، ضریب اندرکنش کرنش برشی-حجمی برای مقادیر مختلف k نشان داده شده است. منحنیهای این شکل بیانگر آن هستند که $1/5$ بهترین مقدار برای این ضریب می‌باشد. در قسمتهای زیر به مقایسه نتایج آزمایشگاهی و مدل پرداخته می‌شود.



مسیرهای ترکیبی تنش

در این قسمت، برای نشان دادن توانایی مدل برای پیش‌بینی رفتار بتن، به ارائه نتایج مدل و آزمایشگاه برای یک مسیر تنش قطعه‌ای خطی پرداخته می‌شود. مسیر بارگذاری در شکل (۳) نشان داده شده است [6]. بار طوری اعمال می‌گردد که در همه حالت‌های تنش تک‌محوره و تنش دو محوره، حداکثر تنش ۲۵ MPa بوجود آید.

نتایج آزمایش و مسیر پیش‌بینی شده توسط مدل در شکل (۴) نشان داده شده است. حداکثر خطا در این حالت برابر ۱۴٪ می‌باشد. با توجه به پراکندگی موجود، که معمولاً در داده‌های آزمایشگاهی مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده از تطابق قابل قبولی برخوردار است.

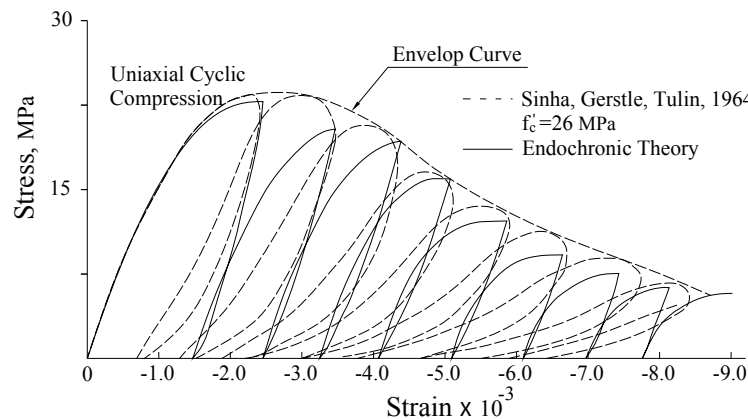


شکل ۴- مسیر تنش به صورت قطعه‌ای خطی وارد بر المان و نتایج حاصل از آنالیز و آزمایش

ملاحظه می‌شود که نتایج مدل و آزمایشگاهی تطابق قابل قبولی دارند، هرچند که در قسمت قله منحنی و تنشهای پسماند نتایج نسبتاً ضعیف می‌باشد.

بارگذاریهای سیکلی

در شکل (۵) نتایج آزمایش و این تئوری برای بارگذاری تک‌محوره سیکلی فشاری بر روی بتن [7] نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش سیکلها شیب منحنی تنش-کرنش بتن در حالت باربرداری و بارگذاری کاهش می‌یابد، در حالی که در پاسخ ارائه شده توسط مدل اندوکرونیک، شیب باربرداری همچنان ثابت مانده است که این ناشی از آن است که اندوکرونیک باربرداری را به صورت کاملاً الاستیک در نظر می‌گیرد و آسیب بتن در آن نادیده گرفته شده است.



شکل ۵- نتایج آزمایش [7] و مدل اندوکرونیک در بارگذاری سیکلی

مدل پلاستیسیته اندوکرونیک اصلاح شده

همانطور که در شکل (۵) نشان داده شده است مقایسه داده‌های آزمایشگاهی و مدل در حالت بارگذاری سیکلی نشان از عدم تطابق خوب نتایج می‌شود لذا لازم است اصلاحاتی در مدل صورت گیرد، در ادامه سعی خواهد شد با وارد کردن تاثیر پارامتر آسیب، مدل اصلاح شده و نتایج مدل برای حالت



بارگذاری سیکلی که پارامتر آسیب سبب کاهش سختی بتن در باربرداری می‌شود، بدست آید. لازم است که این پدیده مهم در بارگذاریهای چرخه‌ای در مدل در نظر گرفته شود. در مدل‌های ارائه شده توسط محققینی چون والانیس و بازانت برای بتن، تأثیر آسیب بر روی پاسخ ماده نادیده گرفته شده است. لذا در این تحقیق سعی شده است با انتخاب پارامتر مناسب و اصلاح آن برای مدل پلاستیسیته اندوکرونیک موجود، نتایج بهبود یابد. مطالعات نشان می‌دهد که برای مواد نیمه تردی مانند بتن که رفتار متفاوتی در کشش و فشار دارند مدل آسیب مازارس مدل مناسبی می‌باشد ولی به دلیل محدود بودن عملکرد این مدل لازم است در بارگذاریهای چندمحوره پیچیده از مدل‌های آسیب تانسوری استفاده گردد. در قسمتهای بعدی ابتدا مدل آسیب مازارس مناسب بدست می‌آید و سپس به کمک چند مثال کارایی مدل جدید بررسی می‌گردد.

پارامتر آسیب

از روابط ساختاری مناسبی که برای در نظرگیری میزان آسیب‌دیدگی بتن می‌توان بکار برد، مدل آسیب ارتجاعی و همسانگرد مازارس می‌باشد [8]. این مدل فرضیات عدم ماندن کرنش پسماند در صورت باربرداری کامل و اینکه کشش در راستاهای اصلی عامل اصلی گسترش و پخش شدن ترکها می‌باشد را در بر دارد. در این مدل مقدار آسیب را می‌توان به کمک یک پارامتر اسکالر D ، که همواره در بازه 0 تا 1 قرار دارد کنترل کرد. حالت $D = 1$ بیانگر آن است که ماده به طور کامل آسیب دیده است و توانایی تحمل بار را از دست داده است. طبق مدل مازارس، رابطه ساختاری به صورت رابطه (۱۲) می‌باشد.

$$\sigma = \tilde{K}(\varepsilon)\varepsilon \quad (12)$$

در رابطه فوق، $\tilde{K}(\varepsilon)$ ماتریس سختی محلی در گامی است که آسیب محاسبه می‌گردد و از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\tilde{K}(\varepsilon) = [1 - D(\varepsilon)]K_0 \quad (13)$$

که در آن K_0 ماتریس سختی محلی برای ماده بدون آسیب می‌باشد. این ماتریس برای ماده همسانگرد، ارتجاعی و خطی محاسبه می‌گردد و لذا مقدار ثابتی دارد.

می‌توان قانده ساختاری را به صورت رابطه (۱۴) نوشت، که $\tilde{F}(\varepsilon)$ نشان دهنده ماتریس نرمی در گامی است که پارامتر آسیب محاسبه می‌گردد و F ماتریس نرمی محلی برای ماده بدون آسیب می‌باشد.

$$\varepsilon = \tilde{F}(\varepsilon)\sigma = \frac{F}{[1 - D(\varepsilon)]}\sigma \quad (14)$$

مقدار کرنش معادل، $\tilde{\varepsilon}$ ، مطابق رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود.

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (15)$$

که در آن:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad (16)$$

در اینجا یک تابع بارگذاری f که وابسته به کرنش معادل $\tilde{\varepsilon}$ و پارامتر q که بیانگر مقدار دامنه الاستیک می‌باشد، به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود.

$$f = \tilde{\varepsilon} - q \quad (17)$$

به طور فیزیکی، q پارامتری است که مقدار بزرگترین کرنش را که در تاریخچه ماده رخ داده است را بیان می‌کند. اگر $f < 0$ باشد، باربرداری رخ می‌دهد و تغییری در پارامتر آسیب مشاهده نمی‌شود. در غیر این صورت، پارامتر آسیب افزایش می‌یابد و مقدار جدید آن به صورت ترکیبی از دو پارامتر اسکالر و دو متغیر مستقل D_C و D_T قابل بیان است که در رابطه (۱۸) ارائه گردیده است.

$$D(\varepsilon) = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (18)$$

متغیرهای D_T و D_C از رابطه (۱۹) بدست می‌آیند.

$$D_T(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}; \quad (19)$$

$$D_C(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}};$$

که در روابط فوق ε_{d0} پارامترهای ماده به شمار می‌روند. پارامتر ε_{d0} نشان دهنده ماکزیمم کرنش معادل است که ماده میتواند رفتار بدون آسیب داشته باشد.

برای حالت تک محوره که نمونه تحت کشش یا فشار است، ضرایب α_T و α_C تنها مقدار یک یا صفر را اخذ می‌کنند. برای حالت‌های چند محوره، مقدار این ضرایب به صورت زیر قابل محاسبه است:

با فرض آنکه برای بارگذاری خاص مقدار بردار کرنش در راستاهای اصلی محاسبه شده است، بردار تنش مؤثر به کمک رابطه الاستیک $\tilde{\sigma} = K_0 \varepsilon$ محاسبه می‌گردد.



$$\bar{\sigma} = \langle \bar{\sigma} \rangle_+ + \langle \bar{\sigma} \rangle_-$$

بردار تنش مؤثر به دو قسمت مثبت و منفی تقسیم می‌گردد،
تانسور کرنش نیز به دو بردار ε_C و ε_T تقسیم می‌گردد:

$$\varepsilon_T = \frac{1+\nu}{E} \langle \bar{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \left\langle \sum_i \bar{\sigma}_i \right\rangle_+ \quad (20)$$

$$\varepsilon_C = \frac{1+\nu}{E} \langle \bar{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \left\langle \sum_i \bar{\sigma}_i \right\rangle_- \quad (21)$$

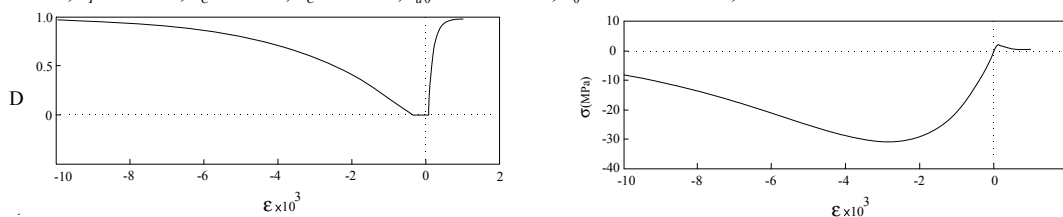
و در انتها پارامترهای مدل محاسبه می‌گردند:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+ \quad (22)$$

$$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ti} \rangle_+}{\varepsilon_V^+}; \quad \alpha_C = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{Ci} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad (23)$$

شکل (۶) بیانگر روابط ساختاری و میزان پارامتر آسیب برای بتن می‌باشد که به کمک پارامترهای زیر که از منحنی تنش-کرنش بتن در حالت تک محوره استخراج شده است، محاسبه گشته است:

$$A_T = 0.70, B_T = 8000, A_C = 1.13, B_C = 1250, \varepsilon_{d0} = 6.7 \times 10^{-5}, E_0 = 24.7 \times 10^9 Pa, \nu = 0.2$$



شکل ۶- منحنی تنش-کرنش تک محوره و منحنی کرنش- پارامتر آسیب

اگر پارامتر آسیب D از رابطه (۱۷) محاسبه گردد و کرنشهای هر گام به کمک رابطه (۲۴) اصلاح شوند، جوابهای بدست آمده از تئوری اندوکرونیك در حالت بارهای سیکلی نیز تطابق قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی خواهند داشت. این رابطه با تطبیق مدل بر نتایج آزمایشگاهی نشان داده شده در شکل (۵) بدست آمده است.

$$\varepsilon_{new} = \left[\left(\frac{1}{1-D} \right)^{\frac{1}{3}} \alpha_C + \left(\frac{1}{1-D} \right)^{\frac{2}{3}} \alpha_T \right] \varepsilon \quad (24)$$

اگرچه با پارامتر آسیب در نظر گرفته شده مدل به خوبی رفتار سیکلی بتن را پیش‌بینی می‌کند، ولی در حالت تنش چند محوره نتایج چندان رضایت‌بخش نیست و نیاز به روابط آسیب جامعتری می‌باشد.

روش محاسبه مرحله‌ای تنش

این قسمت به نحوه محاسبه تنش و کرنش در مراحل مختلف بارگذاری اختصاص دارد. برای حل عددی روابط تئوری، ابتدا روابط ساختاری به صورت نموی بیان و سپس مراحل محاسبه تنش و کرنش در هر یک از گامها ارائه می‌شود. با فرض اینکه مقادیر کرنش در مرحله n -ام موجود است و به دنبال یافتن کرنشها در مرحله $(n+1)$ -ام هستیم، روند محاسبه به طور خلاصه به صورت زیر می‌باشد:

ابتدا مسیر تنش به تعداد گامهای مناسبی تقسیم می‌گردد به گونه‌ای که نمو تنش در هر گام مناسب باشد تا جوابهای بدست آمده از دقت کافی برخوردار باشد. سپس به کمک روابط زیر مقادیر کرنش در هر گام محاسبه می‌گردد.

$$s = \sum_r s_r \quad (12)$$

$$\sigma = \sum_r \sigma_r \quad (13)$$

$$s_r = A_r \int_0^{z_k} e^{-\alpha_r(z_k-z')} \frac{de^p}{dz'} dz' \quad (14)$$

$$\sigma_r = B_r \int_0^{z_H} e^{-\beta_r(z_H-z')} \frac{de^p}{dz'} dz' \quad (15)$$

مشتق گیری از روابط (۱۴) و (۱۵) به معادلات دیفرانسیل زیر منجر می‌شود:

$$ds_{ij}^r = A_r de_{ij}^p - \alpha_r s_{ij}^r dz_s \quad (16)$$



$$d\sigma = B_r d\varepsilon^p - \beta_r \sigma^r dz_H \quad (17)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) تا (۲۱) در روابط فوق خواهیم داشت:

$$dz_s = dz/F_s \quad (18)$$

$$dz_H = dz/kF_H \quad (19)$$

$$de^p = de - ds/2\mu \quad (20)$$

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon - d\sigma/K \quad (21)$$

$$ds_{ij}^r = A_r \left(de_{ij} - \frac{ds_{ij}}{2\mu} \right) - \alpha_r s_{ij}^r \frac{dz}{F_s} \quad (22)$$

$$d\sigma^r = B_r \left(d\varepsilon - \frac{d\sigma}{K} \right) - \beta_r \sigma^r \frac{dz}{\kappa F_H} \quad (23)$$

که توابع F_s به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$F_s = 0.33 + 11.953\sigma(MPa) \quad (24)$$

برای مدول حجمی، K ، مقدار $14582 MPa$ در نظر گرفته شده است. مدول برشی نیز به کمک رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

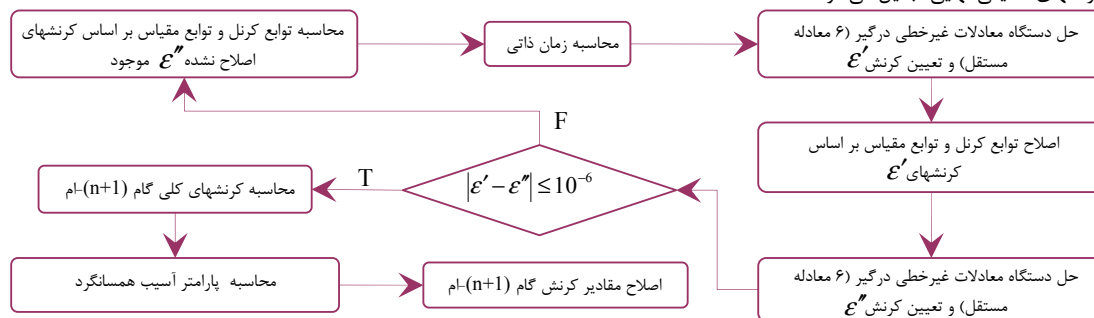
$$\mu(MPa) = 6353.5 + 2.846 \times 10^6 z_s \quad (25)$$

با ساده سازی روابط اصلی مورد استفاده به فرم زیر تبدیل می‌شوند:

$$ds_{ij} = \sum_{r=1}^m A_r \left(de_{ij} - \frac{ds_{ij}}{2\left(\mu_0 + \frac{m}{2}\gamma_0^p\right)} \right) - \frac{\sum_{r=1}^m \alpha_r s_{ij}^r}{(\delta + \eta\sigma)} \left\| \left\| de_{ij} - \frac{ds_{ij}}{2\left(\mu_0 + \frac{m}{2}\gamma_0^p\right)} \right\| \right\|^2 + \kappa^2 \left| d\varepsilon - \frac{d\sigma}{K} \right|^2 \quad (26)$$

$$d\sigma = \sum_{r=1}^m B_r \left(d\varepsilon - \frac{d\sigma}{K} \right) - \frac{\sum_{r=1}^m \beta_r \sigma^r}{\kappa(1 + \beta\varepsilon^p)} \left\| \left\| de_{ij} - \frac{ds_{ij}}{2\left(\mu_0 + \frac{m}{2}\gamma_0^p\right)} \right\| \right\|^2 + \kappa^2 \left| d\varepsilon - \frac{d\sigma}{K} \right|^2 \quad (27)$$

روابط فوق که به صورت شش رابطه درگیر هستند به صورت هم‌زمان حل می‌شوند تا نمو کرنش در هر مرحله بدست آید. مطابق فلوجارت ارائه شده در شکل (۷) ابتدا پارامترهای موجود در روابط (۲۶) و (۲۷) بر اساس میزان تنش و کرنش در ابتدای گام محاسبه می‌شوند، بعد از محاسبه کرنش در انتهای گام این پارامترها به روز رسانی می‌شوند و مجدداً کرنشهای انتهای گام بر اساس این مقادیر جدید اصلاح می‌شوند. به این ترتیب با دانستن تنش در هر گام میتوان از روابط فوق کرنشهای انحرافی و حجمی را بدست آورد. در انتها نیز به کمک این کرنشها میزان پارامتر آسیب محاسبه گشته و کرنشها به کرنشهای حقیقی نهایی تبدیل می‌شوند.



شکل ۷- الگوریتم کلی محاسبه کرنش به کمک تئوری اندوکرونیک

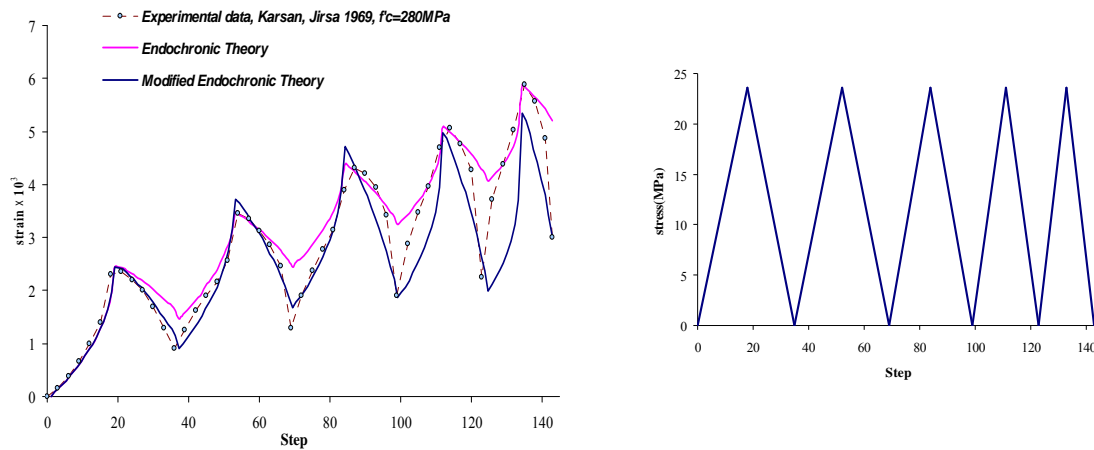
آزمایش بارگذاری چرخهای

بار سیکلی وارد بر نمونه در شکل (۸) نشان داده شده است، بار وارده تا $24 MPa$ افزایش می‌یابد و سپس باربرداری کامل صورت می‌گیرد تا تنش به صفر رسد، این چرخه برای ۵ بار تکرار می‌گردد همچنین بارگذاری به صورت نسبتاً آهسته انجام صورت می‌گردد. نتایج حاصل از آزمایش و پیش‌بینی مدل اندوکرونیک موجود و مدل اندوکرونیک اصلاح شده با در نظرگیری پارامتر آسیب در شکل (۸) نشان داده شده است. پارامترهای بتن به کاررفته در آزمایش به صورت زیر می‌باشد:



$$f'_c = 28 \text{ MPa}, f'_t = 2.8 \text{ MPa}, \nu = 0.2$$

میزان رواداری در محاسبه کرنشها برابر 10^{-8} در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از تئوری و مدلها بیانگر آن است که مدل اندوکرونیک با در نظر گیری پارامتر آسیب رفتار بتن تحت بارگذاری سیکلی را به خوبی نشان می‌دهد.



شکل ۸- نتایج حاصل از آزمایش [9] و مدل اندوکرونیک

نتیجه گیری

تاریخچه تکامل مدل اندوکرونیک، به ویژه برای بتن و مواد نیمه ترد مرور گردید. ملاحظه شد اگرچه مدل‌های رایج اندوکرونیک برای بارگذاریهای ساده و غیرچرخه‌ای کارایی مناسبی دارند، ولی جهت پیش‌بینی رفتار بتن در ناحیه پس از نقطه اوج و بارهای سیکلی نیاز به وارد کردن عوامل مربوط به آسیب در این مدل می‌باشد. مقایسه نتایج آزمایش و پیش‌بینی مدل تعمیم‌یافته نشان دهنده آن است که پارامتر آسیب انتخاب شده و به کارگیری آن در مدل موجود سبب بهبود نتایج می‌گردد. البته لازم به ذکر است که پارامتر آسیب مازارس در بارگذاریهای تک محوره بهتر از حالت بارگذاری چندمحوره جواب می‌دهد، و برای حالت چند محوره و مواد غیرهمسانگرد بهتر است از مدل‌های آسیبی تانسوری استفاده گردد.

مراجع

1. Valanis, K.C. (1971) A theory of viscoplasticity without a yield surface, part I general theory. *Arch. Mech.* **23**, 517-534.
2. Valanis, K.C. (1971) A theory of viscoplasticity without a yield surface, part II application to mechanical behavior of metals. *Arch. Mech.* **23**, 535-551.
3. Bazant, Z.P. (1978) Endochronic inelasticity and incremental plasticity. *International journal of plasticity*, **14**, 691-714.
4. Bazant, Z.P., Shieh, C.L. (1978) Endochronic model for nonlinear triaxial behavior of concrete. *Nuclear engineering and design*, **47**, 305-315.
5. Valanis, K.C., Read, H.E. (1986) An endochronic plasticity theory for concrete. *Mech. of materials*, **5**, 277-295.
6. Scavuzzo, R., Stankowski, T., Gerstle, K.H., Ko, H.Y. Stress-strain curves for concrete under multiaxial load histories. CEAE Department, Univ. of Colorado, Boulder.
7. Sinha, B.P., Gerstle, K.H. & Tulin, L.G. (1964) *J. Concrete institute*, Proceedings 61, 195.
8. Mazars, J. (1981) Mechanical damage and fracture of concrete structures. *Advanced in fracture research, Proc. ICF5, Cannes, France*, 1499-1506.
9. Grassl, P., Jirasek, M. (2006) Damage-plastic model for concrete failure. *Int. J. of Solids and Structures*, **43**, 7166-7196.