محاسبه هسته مقطع

مرتضی ابوطالبی[۱]، آرش نیرومندی[۲]

۱- دانشجوی دکترای دانشکده مهندسی عمران, دانشگاه شیراز

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران, دانشگاه صنعتی شریف

niroomandi@civil.sharif.edu

خلاصه

وقتی به مقطعی نیروی محوری وارد می شود بسته به محل اثر آن نیرو قسمتی از مقطع تحت کشش و قسمتی دیگر در فشار قرار می گیرد. دانستن این نکته که کدام قسمت از مقطع در کشش و کدام قسمت در فشار قرار می گیرد اهمیت زیادی دارد. از جمله این موارد می توان به شالوده هایی که تحت بار خارج از مرکز می باشند اشاره کرد. بدین ترتیب برای یک مقطع ناحیه ای تعریف می شود که با قرار گرفتن نیرو در آن ناحیه در تمام نقاط مقطع تنش فشاری به وجود می آید، به این ناحیه هسته مقطع گفته می شود. در این مقاله ابتدا با استفاده از روش های متعارف هسته مقطع محاسبه شده و سپس از روش ریاضی پیشرفته نگاشت برای بدست آوردن هسته مقطع استفاده می شود. در این مقاله نشان داده می شود که نگاشت می تواند روش مناسبی برای بدست آوردن هسته مقطع باشد.

کلمات کلیدی: عضو فشاری، خروج از مرکزیت، هسته مقطع، نگاشت

مقدمه

زمانی که نیروی محوری به یک عضو وارد می شود باعث ایجاد کشش یا فشار در آن عضو می شود اگر نیرو به مرکز سطح مقطع عضو وارد شود باعث ایجاد کشش یا فشار خالص شده و اگر نیرو به مرکز سطح مقطع وارد نشود (دارای خروج از مرکزیت باشد) می تواند دو لنگر نیز به وجود آورد که بسته به محل قرار گرفتن نیرو در آن مقطع قسمتی در کشش و قسمتی در فشار قرار می گیرد. دانستن این نکته که کدام قسمت از مقطع در کشش و کدام قسمت در فشار قرار می گیرد اهمیت زیادی دارد زیرا برخی مواد مانند بتن و خاک رفتار متفاوتی تحت کشش و فشار از خود نشان می دهند. به عنوان مثال از آنجا که بتن دارای مقاومت کششی ناچیزی می باشد نباید در کشش قرار بگیرد. از جمله موارد دیگری که نشان گر این مساله است شالوده هایی است که تحت بار خارج از مرکز می باشد. از آنجا که خاک نمی تواند تحت کشش قرار بگیرد بنابراین در طراحی این نوع شالوده ها باید دقت شود تا هیچ قسمتی از خاک در کشش قرار نگیرد. مایرهوف Meyerhof از جمله محققانی بود که روشی را در سال ۱۹۵۳ برای تعیین ظرفیت باربری شالوده ها در حالت برون محوری یک طرفه ارایه داد که به روش مساحت موثر معروف است [1]. محققان دیگری نیز روش های تحلیلی برای تعیین ظرفیت باربری نهایی شالوده ها ارایه کردند که از جمله می توان به تئوری پارکاش Parkash و ساران Saran در سال ۱۹۷۱ در حالت برون محوری یک طرفه و هایتر Highter و اندرس Anders در سال ۱۹۸۵ در حالت برون محوری دو طرفه و همچنین باولز Bowles در سال ۱۹۷۵ و دونهام Dunham در سال ۱۹۶۲ اشاره کرد [2] که در همگی آنها هدف محاسبه ظرفیت باربری به گونه ای بود که پس از بارگذاری همه نقاط در فشار قرار داشته باشد. بدین ترتیب برای یک مقطع ناحیه ای تعریف می شود که با قرار گرفتن نیرو در آن ناحیه در تمام نقاط مقطع تنش فشاری به وجود می آید که به این ناحیه هسته مقطع گفته می شود. از این رو هدف ما بدست آوردن معادله نقاطی می باشد که در این ناحیه قرار می گیرند. مفهوم هسته مرکزی یک مقطع توسط یک مهندس فرانسوی به نام برس Bresse در سال ۱۸۵۴ ارائه شده است [3]. روش های مختلفی برای محاسبه هسته مقطع وجود دارد که در زیر به بیان دو روش پرداخته شده است.

[۱] دانشجوی دکتری

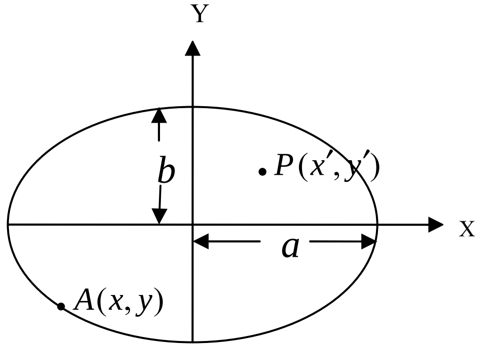
[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد

محاسبه هسته مقطع با استفاده از روش های متعارف:

در این روش ابتدا باید نقطه ای را که دارای ماکزیمم تنش کششی می باشد پیدا کرد. از آنجا که هدف این است که هیچ گونه تنش کششی در مقطع وجود نداشته باشد می توان با صفر قرار دادن این تنش هسته مقطع را بدست آورد. بدست آوردن هسته مقطع برای مقاطعی مانند دایره و مستطیل ساده می باشد زیرا محل قرار گیری نقطه ای که ماکزیمم تنش کششی را دارد مشخص می باشد اما در مقاطعی نظیر بیضی مسئله متفاوت است زیرا محل قرار گرفتن این نقطه مشخص نمی باشد از این رو بدست آوردن هسته مقطع بیضی شکل مورد توجه قرار گرفته است.

محاسبه تنش کششی ماکزیمم در مقطع:

در شکل ۱ یک بیضی با قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ نشان داده شده است. اگر نیروی فشاری P در نقطه ای مانند x' و y' از مرکز سطح وارد شود باعث ایجاد دو لنگر خمشی M_x و M_y می شود. نقطه ای مانند A وجود دارد که تنش های کششی ایجاد شده حاصل از لنگرهای M_x و M_y در آن جا با یکدیگر جمع می شوند و در نتیجه ماکزیمم تنش کششی را به وجود می آورد.



شکل ۱- محل اثر نیروی محوری در مقطع بیضی

از آن جا که A نقطه ای است که روی بیضی قرار دارد می توان نوشت:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (۱)$$

بنابر این y را نسبت به x می توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} \qquad (۲)$$

مقدار تنش در نقطه A برابر است با:

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{M_x y}{I_x}+\frac{M_y x}{I_y} \qquad (۳)$$

که با جایگذاری مقدار لنگرهای M_x و M_y و ممان اینرسی سطح مقطع و همچنین مساحت بیضی در معادله ۳ می توان نوشت:

$$\sigma_A=-\frac{P}{\pi ab}+\frac{Py'y}{\frac{\pi}{4}ab^3}+\frac{Px'x}{\frac{\pi}{4}ba^3} \qquad (۴)$$

با قرار دادن مقدار y از معادله ۲ در معادله ۴ مقدار تنش در نقطه A برابر است با:

$$\sigma_A=-\frac{P}{\pi ab}+\frac{Py'\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}}{\frac{\pi}{4}ab^3}+\frac{Px'x}{\frac{\pi}{4}ba^3} \qquad (۵)$$

با مشتق گرفتن از رابطه ۵ نسبت به x و صفر قرار دادن آن می توان نوشت:

$$\frac{-Py'x}{\frac{\pi}{4}a^2b^2\sqrt{(a^2-x^2)}}+\frac{Px'}{\frac{\pi}{4}ba^3}=0 \qquad (۶)$$

از حل رابطه ۶ و با استفاده از رابطه ۲ می توان مختصات نقطه A (نقطه ای که دارای تنش کششی ماکزیمم است) را بدست آورد:

$$x_A=\frac{x'}{\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}},\ y_A=\frac{y'}{\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}} \qquad (۷)$$

حال با داشتن مختصات نقطه A می توان تنش در این نقطه را با استفاده از رابطه ۳ بدست آورد:

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{M_x y_A}{I_x}+\frac{M_y x_A}{I_y} \qquad (۸)$$

محاسبه هسته مقطع

همان طور که اشاره شد با صفر قرار دادن تنش در نقطه A می توان تضمین کرد که هیچ تنش کششی در مقطع وجود نخواهد داشت بنابراین با استفاده از رابطه ۸ می توان نوشت:

$$-\frac{P}{\pi ab}+\frac{Py'y_A}{\frac{\pi}{4}ab^3}+\frac{Px'x_A}{\frac{\pi}{4}ba^3}=0 \qquad (۹)$$

بدین ترتیب معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{y'^2}{\frac{1}{4}b^2\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}}+\frac{x'^2}{\frac{1}{4}a^2\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}}=1 \qquad (۱۰)$$

با ساده کردن رابطه ۱۰ معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{4(\frac{y'^2}{b^2})}{\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}}+\frac{4(\frac{x'^2}{a^2})}{\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}}=1 \qquad (۱۱)$$

$$\frac{4\left[(\frac{x'^2}{a^2})+(\frac{y'^2}{b^2})\right]}{\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}}=1 \qquad (۱۲)$$

$$4\sqrt{(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2})}=1 \qquad (۱۳)$$

با کمی دقت ملاحظه می شود که رابطه ۱۳ معادله یک بیضی می باشد که پس از ساده کردن می توان آن را به صورت زیر نوشت:

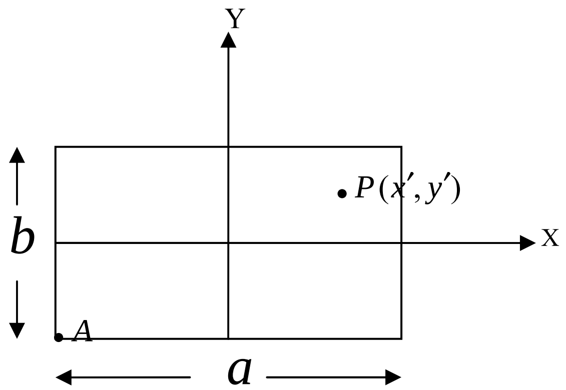
$$\frac{x'^2}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{b}{4}\right)^2}=1 \qquad (۱۴)$$

بدین ترتیب نشان داده شد که هسته مقطع بیضی شکل یک بیضی کوچکتر با قطر بزرگ $\frac{a}{2}$ وقطر کوچک $\frac{b}{2}$ می باشد

اما همان طور که گفته شد محاسبه هسته مقطع برای برخی مقاطع کار ساده ای نیست و نیازمند محاسبات زیادی می باشد اما با استفاده از نگاشت می توان هسته مقطع را برای چنین مقاطعی به سادگی محاسبه کرد. حال با استفاده از این روش ابتدا هسته مقطع را برای مستطیل و سپس برای بیضی بدست می آوریم.

محاسبه هسته مقطع با استفاده از نگاشت

در این روش می توان در برخی مقاطع با استفاده از تبدیل محورهای مختصات به محورهای مختصات جدید مقاطع پیچیده را به مقاطعی تبدیل کرد که محاسبه هسته مقطع در آن ها آسان می باشد [4]. در این جا برای آشنایی بیشتر ابتدا محاسبه هسته مقطع مستطیل و سپس هسته مقطع یک بیضی مورد توجه قرار گرفته است. برای مقطع یک مستطیل با طول a و عرض b هسته مقطع یک لوزی [5] با قطرهای $\frac{a}{3}$ و $\frac{b}{3}$ و برای مقطع دایره ای به شعاع r هسته مقطع یک دایره با شعاع $\frac{r}{4}$ می باشد [6].



شکل ۲- محل اثر نیروی محوری در مقطع مستطیل

در شکل ۲ مقطع یک مستطیل نشان داده شده است که نیروی فشاری P در نقطه ای مانند x' و y' از مرکز سطح وارد شده است.
از آن جا که می توان b را ضریبی از a در نظر گرفت بنا بر این K را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

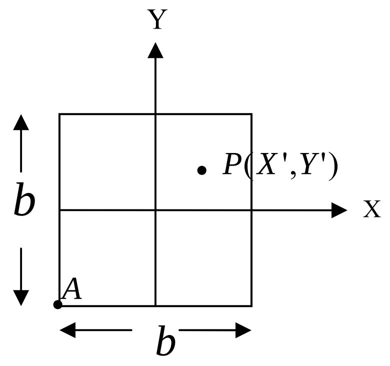
$$K=\frac{a}{b} \tag{۱۵}$$

و محور مختصات جدید با استفاده از تبدیلات زیر تعریف می شود:

$$X=\frac{x}{K} \quad , \quad Y=y\,. \tag{۱۶}$$

با در نظر گرفتن تبدیلات بالا مقطع مستطیل به مقطع مربع تبدیل می شود و مختصات محل جدیدی نیروی P به صورت زیر می باشد (شکل۳)

$$X'=\frac{x'}{K} \quad , \quad Y'=y' \tag{۱۷}$$



شکل ۳- مقطع تبدیل یافته مستطیل

پر واضح است که تنش کششی ماکزیمم در نقطه A به وجود می آید پس با صفر قرار دادن تنش در نقطه A می توان هسته مقطع را برای مقطع مستطیل بدست آورد.

با استفاده از رابطه ۳ می توان نوشت:

$$\sigma_A = -\frac{P}{b^2} + \frac{PY'\frac{b}{2}}{\frac{b^4}{12}} + \frac{PX'\frac{b}{2}}{\frac{b^4}{12}} \qquad (۱۸)$$

از طرف دیگر:

$$-\frac{P}{b^2} + \frac{PY'\frac{b}{2}}{\frac{b^4}{12}} + \frac{PX'\frac{b}{2}}{\frac{b^4}{12}} = 0 \qquad (۱۹)$$

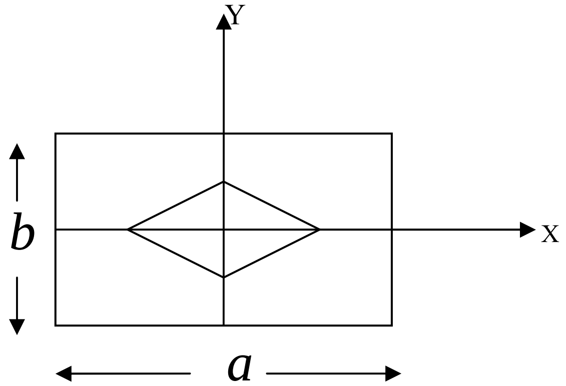
بدین ترتیب معادله زیر بدست می آید:

$$\frac{Y'}{\frac{b}{6}} + \frac{X'}{\frac{b}{6}} = 1 \qquad (۲۰)$$

حال با استفاده از روابط (۱۵) (۱۶) و(۱۷) می توان رابطه (۲۰)را در دستگاه مختصات مورد نظر به صورت زیر نوشت:

$$\frac{y'}{\frac{b}{6}} + \frac{x'}{\frac{a}{6}} = 1 \qquad (۲۱)$$

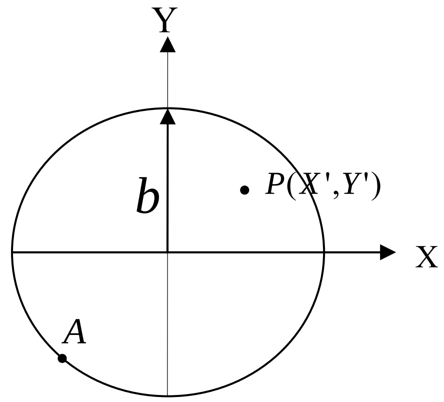
معادله بالا معادله یک خط می باشد. به همین ترتیب اگر نیروی P به ربع های دیگر صفحه مختصات وارد شود می توان هسته مقطع را برای مقطع مستطیل بدست آورد که در نتیجه همان طور که انتظار می رود به صورت یک لوزی با قطرهای $\frac{a}{3}$ و $\frac{b}{3}$ می باشد (شکل۴).



شکل ۴- هسته مقطع مستطیل

به این ترتیب می توان با استفاده از نگاشت هسته مقطع را برای برخی مقاطع بدست آورد. حال بار دیگر هسته مقطع را برای مقطع یک بیضی بدست می آوریم:

همان طور که در شکل ۵ نشان داده شده است با در نظر گرفتن روابط (۱۵) (۱۶) و (۱۷) می توان مقطع یک بیضی را به مقطع دایره ای به شعاع b تبدیل کرد.



شکل ۵- مقطع تبدیل یافته بیضی

اگر e را فاصله مرکز سطح مقطع دایره تا نقطه P در نظر بگیریم آن گاه e برابر است با:

$$e=\sqrt{(X'^2+Y'^2)} \tag{۲۲}$$

و مقدار تنش در نقطه A برابر است با:

$$\sigma_A=-\frac{P}{A}+\frac{Mb}{I} \tag{۲۳}$$

با صفر در نظر گرفتن تنش در نقطه A و با استفاده از رابطه ۲۳ داریم:

$$-\frac{P}{\pi b^2}+\frac{Peb}{\frac{\pi}{4}b^4}=0 \tag{۲۴}$$

با قرار دادن مقدار e از رابطه ۲۲ در رابطه ۲۴ داریم:

$$-\frac{P}{\pi b^2}+\frac{P\sqrt{(X'^2+Y'^2)}b}{\frac{\pi}{4}b^4}=0 \tag{۲۵}$$

با ساده کردن رابطه ۲۵ معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sqrt{(X'^2+Y'^2)}=\frac{b}{4} \tag{۲۶}$$

$$X'^2+Y'^2=\frac{b^2}{4^2} \tag{۲۷}$$

حال کافی است که با استفاده از روابط (۱۵) (۱۶) و (۱۷) رابطه (۲۷) را در دستگاه مختصات مورد نظر نوشت:

$$\frac{b^2}{a^2}x'^2+y'^2=\frac{b^2}{4^2} \tag{۲۸}$$

با ساده کردن رابطه ۲۸ معادله به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{a}{4}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{b}{4}\right)^2}=1 \tag{۲۹}$$

بدین ترتیب ملاحظه می شود که هسته مقطع یک بیضی (همان طور که قبلا نشان داده شد) یک بیضی با قطر بزرگ $\frac{a}{2}$ وقطر کوچک $\frac{b}{2}$ می باشد

نتیجه گیری

هسته مقطع به عنوان ناحیه ای از مقطع که با قرار گرفتن نیروی محوری در آن ناحیه کل مقطع در فشار کامل قرار می گیرد تعریف می شود. دانستن این نکته که کدام قسمت از مقطع در کشش قرار می گیرد و کدام قسمت در فشار اهمیت زیادی دارد زیرا برخی مواد مانند بتن و خاک رفتار متفاوتی در مقابل اعمال نیروی کششی و فشاری از خود نشان می دهند. به عنوان مثال از آنجا که بتن دارای مقاومت کششی ناچیزی می باشد نباید در کشش قرار بگیرد. روش رایج برای بدست آوردن هسته مقطع این است که با یافتن و صفر قرار دادن نقطه ای که ماکزیمم تنش کششی را دارد معادله این نقاط را بدست آورد، هرچند استفاده از این روش برای بدست آوردن هسته مقاطعی مانند دایره و مستطیل کار ساده ای است اما برای مقاطع پیچیده مانند بیضی مشکل می باشد. با توجه به این که دایره با یک تغییر خطی به بیضی قابل تبدیل است با اعمال تبدیل وارون این نگاشت خطی می توان هسته دایره که به فرم دایره کوچک تری است را به بیضی تبدیل نمود این نتیجه دقیقا به صورت مشابه به مربع و مستطیل قابل تعمیم است همان طور که در این مقاله بیان شد از نگاشت می توان به عنوان یک روش سریع و آسان برای بدست آوردن هسته این گونه مقاطع استفاده کرد.

مراجع

1. Das, B.M. (1993) *Principles of geotechnical engineering.* International Thomson Publishing.
2. Bowles, J.E. (1982) *Foundation analysis and design.* McGrawHill-Higher Education.
3. Gere, M. and Timoshenko, S.P. (1984) *Mechanics of materials.* Thomson Brooks/Cole.
4. Greenberg, M.D. (1998) *Advanced engineering mathematics.* Prentice Hall.
5. Beer, F.P., Johnston, E.R. and Dewolf, J. (2001) *Mechanics of materials.* McGraw-Hill.
6. Flugge, W. (1962) *Handbook of engineering mechanics.* McGraw-Hill, New York.