محاسبه ضرایب میرایی رایلی برای سیستمهای با درجات آزادی بالا

بیت ا... بدرلو

دانشجوی دکترای سازه ، دانشگاه تربیت مدرس ، تهران

badarloo@modares.ac.ir

خلاصه

قبل از تحلیل سازه های با درجات آزادی بالا حدس مقادیر معنی دار ضرایب رایلی α وβ برای آنها مشکل می باشد. لذا مهندسین به هنگام تحلیل این قبیل سازه ها با فرض یک نسبت میرایی ثابت برای تمام مودهای سازه مقادیر ضرایب رایلی را تعیین می کنند که این وضعیت غیر واقعی می باشد چرا که نسبت میرایی سازه در مودهای بالاتر افزایش می یابد. برای حل این مشکل در این مقاله روشی ارائه شده است که بر اساس آن مقادیر ضرایب رایلی α وβ بگونه ای تعیین می شوند که بر اساس این ضرایب مجموعه ای از نسبت های میرایی که با افزایش شماره مودها افزایش می یابد فراهم می شود که بدین ترتیب اطلاعات ورودی مورد نیاز برای تحلیل دینامیکی تامین می شود. در این مقاله ضمن بیان رئوس کلی روش مذکور، نتایج نظیر انواع مختلفی از سازه ها کنترل شده و نتایج به صورت نموداری نیز نمایش داده شده اند.

کلمات کلیدی : دینامیک، میرایی، ضرایب رایلی، فرکانس طبیعی

مقدمه

در تحلیل دینامیکی سازه ها و فنداسیونها خاصیت میرایی از اهمیت فوق العاده ای برخوردار است. به علت محدود بودن اطلاعات و شناخت ما از میرایی، مؤثرترین و کاراترین روش برای در نظر گرفتن میرایی در تحلیل مودال سازه ها انتخاب میرایی به صورت میرایی رایلی معادل و به صورت رابطه (۱) می باشد.

$$[C] = \alpha\,[M] + \beta\,[K] \qquad (۱)$$

که در آن [C]، [K]، [M] به ترتیب معرف ماتریس میرایی، ماتریس سختی و ماتریس جرم و متغیرهای α وβ ضرایب رایلی می باشند.

استفاده از ماتریس میرایی به فرم رابطه (۱) دارای این مزیت است که شرط تعامد، رابطه (۲)، در ماتریس میرایی ارضاء می شود.

$$\Phi_m^T C \Phi_n = 0 \qquad m \neq n \qquad (۲)$$

با قبول خاصیت تعامد در ماتریس های جرم و سختی که در کتابهای دینامیک سازه ها اثبات شده است و در نظر گرفتن رابطه (۲) می توان سازه های دارای n درجه آزادی را به n سیستم یک درجه آزادی و مستقل ساده نمود.

به دلیل اینکه برای سیستم های با درجات آزادی بالا حدس مقادیر معنی دار α وβ در شروع تحلیل دینامیکی (مودال) مشکل می باشد. لذا در تحلیل های عملی مهندسی تحلیل‌گر بر اساس تجربه و مراجع مرتبط مجبور به استفاده از یک نسبت میرایی ثابت برای تمام مودهای اساسی سازه می باشد. در حالی که با افزایش شماره مودها مشارکت جرم مودی کاهش می یابد لذا با توجه به رابطه $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ معلوم می گردد که در مودهای بالاتر به دلیل کاهش مشارکت جرمی، فرکانس افزایش پیدا می کند و همچنین بر طبق رابطه $C_c = 2\sqrt{km}$ (میرایی بحرانی) معلوم می شود که به دلیل کاهش جرم مودی در مودهای متوالی ضریب C_c با افزایش شماره مودها کاهش می یابد. نسبت میرایی (D) که به صورت $D = \frac{C}{C_c}$ تعریف می شود به دلیل کاهش ضریب C_c در مودهای بالاتر، با افزایش شماره مودها مقدار آن نیز افزایش خواهد یافت. بدین ترتیب معلوم می گردد که فرض نسبت میرایی ثابت نظیر تمام مودها یک فرض غیر واقعی بوده و مخصوصا برای سیستم دینامیکی که در آن مشارکت مودهای بالاتر قابل توجه باشد، نتایج بدست آمده بر اساس فرض نسبت میرایی ثابت در تمام مودها مطمئنا واقع بینانه نخواهد بود.

فرمولاسیون میرایی رایلی

در حالت کلی رابطه حرکت سیستم چند درجه آزادی تحت نیروی خارجی اعمالی به صورت رابطه (۳) قابل بیان است.

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=\{P(t)\} \qquad (۳)$$

با جایگزینی رابطه مختصات نرمال $(X = \Phi Y)$ و مشتقات زمانی آن در رابطه (۳) و پیش ضرب کردن در ترانهاده بردار شکل مود n ام ، Φ_n^T ، خواهیم داشت :

$$\Phi_n^T M\Phi\ddot{Y} + \Phi_n^T C\Phi\dot{Y} + \Phi_n^T K\Phi Y = \Phi_n^T P(t) \qquad (۴)$$

شرایط تعامد $(m \neq n)$ $\qquad \Phi_m^T C\,\Phi_n = 0 \qquad \Phi_m^T K\,\Phi_n = 0 \qquad \Phi_m^T M\,\Phi_n = 0$

باعث می گردد که کلیه جملات به غیر از جمله مربوط به مود n ام در عبارات جرم، سختی و میرایی در رابطه (۴) صفر گردند که بدین ترتیب رابطه (۴) را می توان به صورت رابطه (۵) بازنویسی نمود.

$$M_n\ddot{Y}_n + C_n\dot{Y}_n + K_nY_n = P_n(t) \qquad (۵)$$

همچنین رابطه (۵) را می توان به صورت رابطه (۶) بازنویسی نمود.

$$\ddot{Y}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{Y}_n + \omega_n^2Y_n = \frac{P_n(t)}{M_n} = \overline{P}_n(t) \qquad (۶)$$

رابطه (۴) تنها زمانی معتبر است که ماتریس میرایی متناسب با ماتریس سختی و ماتریس جرم باشد که بدین ترتیب با استفاده از میرایی بیان شده به فرم رابطه(۱)، میرایی مشخص شده در رابطه (۴) به فرم نمایش داده شده در رابطه (۷) قابل حصول است.

$$\phi^T C\phi = \begin{bmatrix} \alpha+\beta\omega_1^{\ 2} & 0 & . \ . & 0 \\ 0 & \alpha+\beta\omega_2^{\ 2} & . \ . & 0 \\ . & . & . \ . & . \\ 0 & . & . \ . & \alpha+\beta\omega_n^{\ 2} \end{bmatrix} \qquad (۷)$$

از مقایسه معادلات (۷) و (۶) و (۴) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} 2\xi_1\omega_1 &= \alpha+\beta\omega_1^{\ 2} \\ 2\xi_2\omega_2 &= \alpha+\beta\omega_2^{\ 2} \\ 2\xi_n\omega_n &= \alpha+\beta\omega_n^{\ 2} \end{aligned} \qquad (۸)$$

در صورتی که سیستم دینامیکی مورد مطالعه تنها دارای ۲ درجه آزادی باشد معادله (۸) به صورت زیر قابل بیان است.

$$\begin{aligned} 2\xi_1\omega_1 &= \alpha+\beta\omega_1^{\ 2} \\ 2\xi_2\omega_2 &= \alpha+\beta\omega_2^{\ 2} \end{aligned} \qquad (۹)$$

که در این شرایط با حل دستگاه معادله (۹) ضرایب مجهول α وβ معلوم می گردند.

اما در حالتی که سیستم مورد مطالعه دارای درجات آزادی بالایی (مثلا ۵۰۰ یا ۱۰۰۰ درجه آزادی) باشد، تحلیلگر در تعیین ضرایب رایلی که برای تمام مودهای ارتعاشی یا حداقل برای مودهای اساسی سیستم معتبر باشد، دچار مشکل خواهد بود. چرا که به طور قطع هیچ راه حل مستقیمی برای برای رسیدن به این مقادیر نمی باشد و راه حل ممکن یک راه حل تکراری می باشد که در این راه حل مقادیر α وβ نظیر یک سیستم از طریق بهترین برازش انجام شده بر روی مقادیر α وβ نظیر تمام مودهای سیستم به دست می آید. اما روشی که در این مقاله ارائه می شود یک روش ساده می باشد که بر اساس آن می توان به مقادیر رایلی منحصر به فرد و معتبری دست یافت. ضرایب رایلی بدست آمده از این روش برای سیستم های با تعداد درجات آزادی بالا نیز معتبر می باشد.

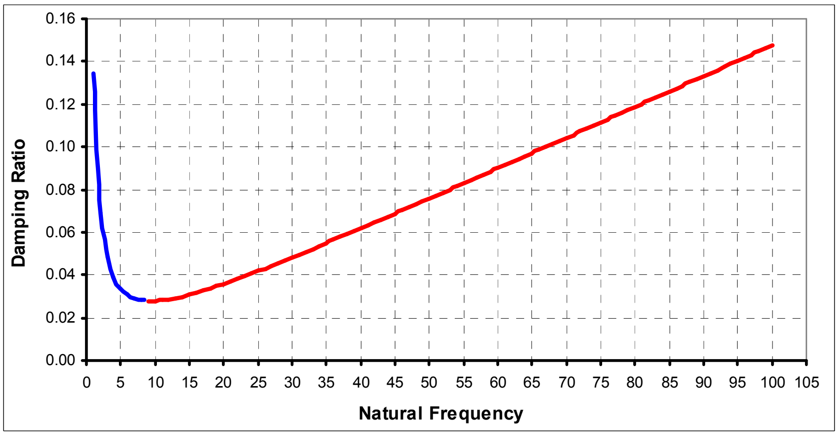
محاسبه ضرایب رایلی برای سیستم های بزرگ

از رابطه(۸) داریم:

$$2\xi_1\omega_1 = \alpha+\beta\omega_1^{\ 2}$$

$$\text{یا} \qquad \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \qquad (۱۰)$$

نمودار رابطه (۱۰) در شکل (۱) نشان داده شده است و همانگونه که از این شکل پیداست رابطه (۱۰) دارای دو ناحیه خطی و غیر خطی می باشد. بطوریکه تغییرات منحنی رابطه (۱۰) در محدوده فرکانسی ۰٫۵ الی ۸٫۵ رادیان بر ثانیه به صورت غیر خطی و در محدوده فرکانسی بزرگتر از ۸٫۵ رادیان بر ثانیه تغییرات نسبت میرایی با فرکانس خطی می باشد.



شکل ۱ – منحنی تغییرات نسبت میرایی با فرکانس طبیعی سیستم

برای حالتی که سیستم دینامیکی دارای درجات آزادی بالایی مثل ۱۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰ و یا بالاتر می باشد، نیازی به اندازه گیری پارامتر ξ_n در تمام مودها نمی باشد، بلکه کافی است ξ_n نظیر مودهایی که مجموع مشارکت جرمی آنها حدود ۱۰۰٪ (بیش از ۹۵٪) میباشد را اندازه گیری نماییم. به عنوان مثال برای یک سازه فولادی با ۵۰۰ درجه آزادی ، اگر مجوع مشارکت جرمی ۱۰۰٪ در ۱۵ مود اول حاصل شود، در چنین حالتی به جای در نظر گرفتن میرایی ثابت مثلا ۵٪ برای تمام ۱۵ مود اول، می توان میرایی برابر با ۲٪ برای مود اول و ۵٪ برای آخرین مود سازه در نظر گرفت.

با توجه به منحنی شکل (۱) می توان نتیجه گرفت که در رابطه $Y = \frac{a}{X} + bX$، زمانی که X مقدار کوچکی می باشد، جمله اول $\frac{a}{X}$ حاکم می باشد که با افزایش مقدار X ، مشارکت جمله اول تقلیل یافته و در نهایت به صفر میل می کند. در حالیکه با افزایش مقدار X ، مشارکت جمله دوم افزایش یافته و جمله حاکم در عبارت می گردد. به عبارت دیگر چنانچه سیستم دینامیکی مورد نظر خیلی انعطاف پذیر باشد دارای فرکانس اصلی پایینی خواهد بود که در این حالت نسبت میرایی از ناحیه غیر خطی نمودار شکل (۱) تبعیت می کند. در مودهای بالاتر به دلیل افزایش فرکانس ارتعاشی نسبت میرایی با فرکانس ارتعاشی متناسب خطی خواهد بود. به عنوان مثال آنتن های انعطاف پذیر، شمع های خیلی بلند یا دودکش های بلند احتمالا دارای رفتار این چنینی خواهند بود.

چون اکثر سازه های مهندسی عمران به منظور داشتن صلبیت قابل قبولی طراحی می شوند، لذا دارای فرکانس اصلی بالایی خواهند بود. بگونه ای که در این قبیل سازه ها ، جمله شامل $\frac{\beta}{2}$ معمولا حاکم خواهد بود. علاوه بر این با فرض این مطلب که محدوده غیرخطی برای سازه های متداول خیلی کوچک می باشد، فرض تناسب خطی میرایی و فرکانس ارتعاشی سیستم غیر واقع بینانه نخواهد بود.

مجموعه مقادیر $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ و $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ را در نظر میگیریم. نسبت میرایی نظیر مود iام با استفاده از درونیابی خطی این مقادیر توسط رابطه ذیل قابل بیان است:

$$\xi_i = \frac{\xi_m - \xi_1}{\omega_m - \omega_1}(\omega_i - \omega_1) + \xi_1 \qquad (۱۱)$$

که در آن :

ξ_i: نسبت میرایی نظیر مود I ام ($i \le m$)　　ξ_1: نسبت میرایی نظیر مود اول.

ξ_m: نسبت میرایی نظیر موداصلی m ام (m تعداد مود اصلی در نظر گرفته شده می باشد.)

ω_i: فرکانس طبیعی نظیر مود iام　　ω_1: فرکانس طبیعی نظیر مود اول.　　ω_m: فرکانس طبیعی نظیر موداصلی m ام.

در سازه های با تعداد درجات آزادی بالا فقط چند مود اول آنها در رفتار دینامیکی سازه دارای مشارکت اساسی می باشند. برای اکثر سازه های مهندسی، تعداد مودهای اساسی که تقریبا دارای مجموع مشارکت جرمی ۹۵٪ می باشندحدود ۳ مود در حالت حداقل و حدود ۲۵ مود در حالت حداکثر میباشد. تعیین تعداد مودهایی که مشارکت اساسی در پاسخ سازه دارند بر اساس یک حل مقدار ویژه و نتایج مشارکت جرم مودی طی گامهای زیر انجام می شود.

۱) تعداد m ۲/۵ مود را در نظر گرفته و تحلیل مقدار ویژه انجام دهید (m معرف تعداد مودهایی است که دارای مشارکت اساسی در پاسخ سازه می باشند).

۲) مقدار نسبت میرایی نظیر مود اول(ξ_1) را انتخاب کنید.

۳) مقدار نسبت میرایی نظیر مود m ام (ξ_m) را انتخاب کنید.

۴) برای مودهای میانی i ($1 < i < m$) مقادیر ξ_i را بر اساس درونیابی خطی و بر طبق رابطه (۱۱) بدست آورید.

۵) برای مودهای بزرگتر از m ، با استفاده از برونیابی ، نسبت میرایی متناظر آنها را بر طبق رابطه(۱۲) بدست آورید.

$$\xi_i = \frac{\xi_m - \xi_1}{\omega_m - \omega_1}(\omega_i - \omega_m) + \xi_m \qquad m < i \le 2.5m \qquad (۱۲)$$

۶) اولین مجموعه اطلاعات شامل ξ_1، ξ_m، ω_1 و ω_m را انتخاب کنید.

۷) مقدار β را بر طبق رابطه ذیل بدست آورید.

$$\beta = \frac{2\xi_1\omega_1 - 2\xi_m\omega_m}{\omega_1^2 - \omega_m^2} \qquad (۱۳)$$

۸) با جایگزینی مقدار β در رابطه(۱۴) مقدار α را بدست آورید.

$$2\xi_1 \omega_1 = \alpha + \beta \omega_1^2 \qquad (۱۴)$$

۹) دومین مجموعه اطلاعات شامل ξ_1، $\xi_{2.5m}$، ω_1 و $\omega_{2.5m}$ را انتخاب کنید.

۱۰) مقدار α وβ را بر طبق معادلات (۱۳) و (۱۴) بدست آورید.

حال بدین ترتیب مقادیر بدست آمده از ۳ روش ذیل در دسترس می باشد.

۱) نتایج حاصل بر اساس درونیابی خطی.

۲) نتایج حاصل بر اساس مجموعه اطلاعات ξ_1، ξ_m، ω_1 و ω_m.

۳) نتایج حاصل بر اساس مجموعه اطلاعات ξ_1، $\xi_{2.5m}$، ω_1 و $\omega_{2.5m}$.

در این مرحله منحنی فرکانس- نسبت میرایی نظیر هر ۳ روش فوق را بر اساس رابطه(۱۰) ترسیم می کنیم و کنترل می‌کنیم که کدام روش بهترین برازش از منحنی نظیر برونیابی خطی m مود اصلی اول می باشد.

اعتبار سنجی روش

در این قسمت به منظور اعتبار سنجی روش ارائه شده در این مقاله، رو ش مذکور در مورد ۳ سازه متفاوت بکاربرده شده است.

مورد اول:

یک دودکش بتن مسلح به ارتفاع ۳۰۵ متر که فرض می شود پاسخ دینامیکی اساسی آن در ۶ مود اول رخ می دهد و نسبت میرایی در آنها از ۲٪ تا ۱۰٪ متغیر است. نتایج تحلیل مودال دودکش مورد مطالعه در جدول(۱) آورده شده است.

جدول ۱ - مقادیر فرکانس ۱۵ مود اول دودکش بتن مسلح

شماره مود	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
فرکانس(rad/sec)	**۶**	**۱۳**	**۱۳**	**۱۵**	**۱۷**	**۱۹**	**۲۱**	**۲۳**	**۲۳**	**۲۳**	**۲۶**	**۳۰**	**۳۴**	**۳۵**	**۳۵**

با در نظر گرفتن نسبت میرایی ۲٪ برای مود اول و نسبت میرایی ۱۰٪ برای مود ششم مقادیر نسبت میرایی نظیر تمام مودهای ارتعاشی سازه به سه روش زیر محاسبه شده است که خلاصه نتایج به صورت نموداری در شکل (۲) نشان داده شده است.

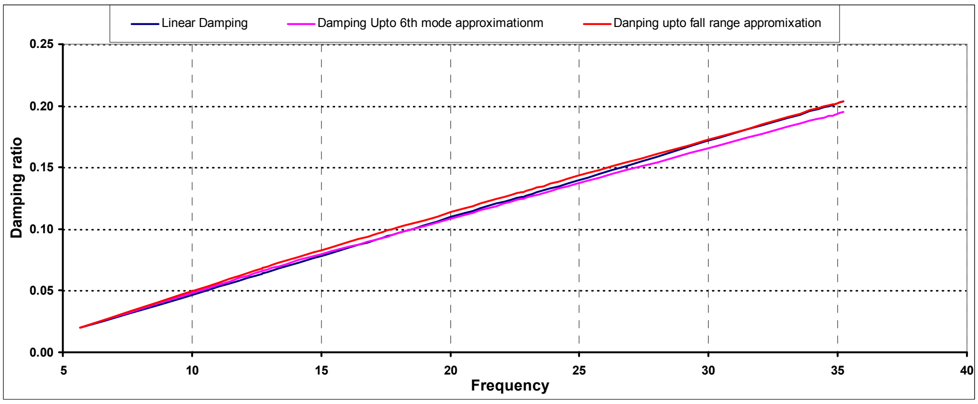
۱- بر اساس درونیابی خطی و با استفاده از رابطه

$$\xi_i = \frac{\xi_m - \xi_1}{\omega_m - \omega_1}(\omega_i - \omega_1) + \xi_i$$

۲- بر اساس ۶ مود اول سازه و با استفاده از رابطه

$$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

۳- بر اساس کل مودها و با استفاده از رابطه $$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$



شکل۲ – منحنی تغییرات نسبت میرایی برای مودهای مختلف مدل دودکش

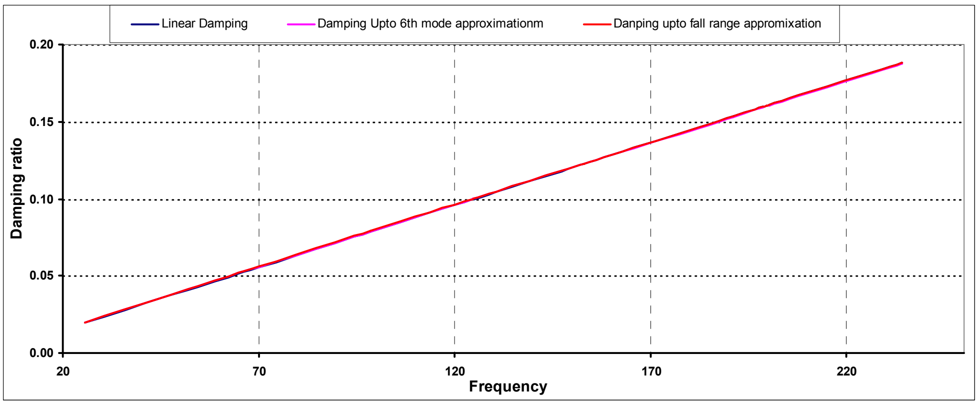
مورد دوم:

یک مدل فنداسیون دارای ۷۱۸۷ درجه آزادی که فرض می شود پاسخ دینامیکی اساسی آن در ۶ مود اول رخ می دهد و نسبت میرایی در آنها از ۱۰٪ تا ۱۵٪ متغییر است.

جدول ۲ – مقادیر فرکانس ۱۵ مود اول فنداسیون

شماره مود	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
فرکانس(rad/sec)	**۲۶**	**۶۳**	**۶۵**	**۹۹**	**۱۲۴**	**۱۲۵**	**۱۵۳**	**۱۵۸**	**۱۹۱**	**۲۰۰**	**۲۰۳**	**۲۰۹**	**۲۱۷**	**۲۳۲**	**۲۳۶**

با در نظر گرفتن نسبت میرایی ۱۰٪ برای مود اول و نسبت میرایی ۱۵٪ برای مود ششم مقادیر نسبت میرایی نظیر تمام مودهای ارتعاشی سازه به سه روش مذکور در فوق محاسبه شده است که خلاصه نتایج به صورت نموداری در شکل (۳) نشان داده شده است.



شکل۳ – منحنی تغییرات نسبت میرایی برای مودهای مختلف مدل فنداسیون

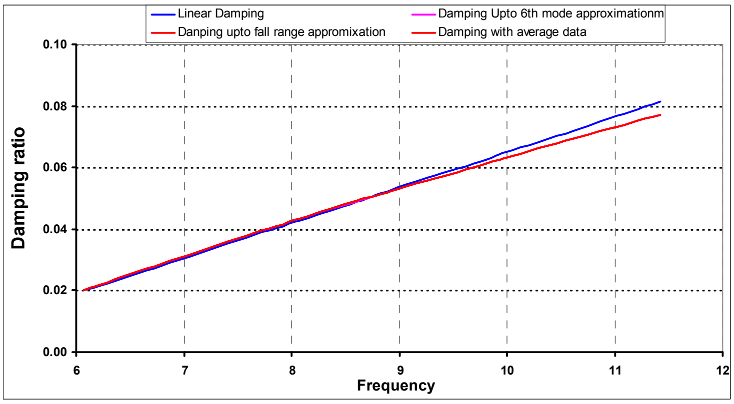
مورد سوم

یک ساختمان فولادی ۳ بعدی ، دارای ۱۸۰۰۰ درجه آزادی که فرض می شود پاسخ دینامیکی اساسی آن در ۶ مود اول رخ می دهد و نسبت میرایی در آنها از ۲٪ تا ۵٪ متغییر است.

جدول ۳ - مقادیر فرکانس ۱۵ مود اول ساختمان ۳ بعدی

شماره مود	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
فرکانس(rad/sec)	**۶,۱**	**۶,۲**	**۶,۶**	**۷,۸**	**۸,۲**	**۸,۷**	**۸,۸**	**۸,۹**	**۹,۳**	**۹,۸**	**۱۰**	**۱۰,۶**	**۱۱,۱**	**۱۱,۲**	**۱۱,۴**

با در نظر گرفتن نسبت میرایی ۲٪ برای مود اول و نسبت میرایی ۵٪ برای مود ششم مقادیر نسبت میرایی نظیر تمام مودهای ارتعاشی سازه به سه روش مذکور در فوق محاسبه شده است که خلاصه نتایج به صورت نموداری در شکل (۴) نشان داده شده است.



شکل۴ – منحنی تغییرات نسبت میرایی برای مودهای مختلف مدل ساختمان ۳ بعدی

نتیجه‌گیری

نرم افزارهای تحلیلی، تجاری موجود از قبیل SAP۲۰۰۰ برای تحلیل دینامیکی سیستم های چند درجه آزادی نیازمند مقادیر α وβ می باشند که مهندسین در حال حاضر با فرض یک میرایی ثابت در تمام مودها مقادیر α وβ را معلوم می نمایند که این فرض یک فرض غیر واقعی می باشد. بر اساس روش شرح داده شده در این مقاله به راحتی می توان مقادیر α وβ به صورت منطقی تری پیش بینی نمود که بر اساس آنها نسبت میرایی در هر مود نسبت به مود قبلی افزایش می یابد که از این مقادیر می توان به عنوان اطلاعات ورودی در تحلیل دینامیکی استفاده نمود.

مقادیر به دست آمده بر اساس این روش نسبت به مقادیر بدست آمده از روش فرض میرایی ثابت برای تمام مودها تصویر واقعی تری از رفتار سازه تحت بارگذاری دینامیکی ارائه می کند.

مراجع

۱- Clough, R.W. and Penzien J. Dynamic of Structure, McGraw Hill Kogakusha, ۱۹۷۵.
۲- SAP User Manual, University of California, Berkeley.