تعیین محل دقیق سطح آزاد نشت با استفاده از روش‌های اجزای مرزی

محمد نبویان پور[۱]، دکتر حسین محمد ولی سامانی [۲]
nabavianpour@gmail.com

خلاصه

به طور کلی به منظور تعیین محل سطح آزاد نشت از روش‌های مختلفی(راه حلها فرمول‌های تقریبی و تجربی و یا حل از طریق رسم شبکه جریان) استفاده می‌گردد. روش‌های تحلیلی حل تراوش در محیط‌های متخلخل مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل حاکم با استفاده از فرضیات ساده کننده می‌باشد. این فرضیات در شرایط خاص قابل قبول هستند و لذا دامنه کاربرد روش‌های تحلیلی محدود به مسائل با هندسه خاص و شرایط مرزی خاص می‌شود.

همچنین می‌توان از روش‌های مختلف عددی نظیر روش تفاضل‌های محدود، روش اجزای محدود، و روش حجم‌های محدود نیزدر تعیین محل سطح آزاد نشت بهره گرفت .

در این مقاله از روش اجزای مرزی که از جمله روش‌های عددی است برای حل معادله حرکت آب در محیط‌های متخلخل استفاده شده است و با گسسته سازی معادله تراوش به روش اجزای مرزی و همچنین حل تحلیلی معادلات حاصل از منقطع کردن معادله تراوش در حالت کلی(غیرهمسان، غیرهمگن) محل سطح آزاد، مکان خروجی آب در پایین دست سد محاسبه می‌کند. باید توجه داشت که دانستن محل دقیق سطح آزاد نشت منجر به یافتن محل هایی که باید در هنگام ساختن سد خاکی به آن توجه ویژه داشت می‌گردد.

روش اجزای مرزی از دقیق ترین روش های حل معادلات بای هارمونیک می‌باشد که با توجه به قابلیت حل تحلیلی این معادلات توسط این روش، سرعت و دقت روش اجزای مرزی را بسیار زیاد خواهد نمود. همچنین توانایی بسیار زیاد این روش در مدل کردن محیط های متخلخل و همچنین مرز های پیچیده موجب توجه بسیاری از محققان به این روش شده است. اگرچه پیچیده بودن معادلات در این روش از سایر روش های محاسباتی بیشتر می باشد اما دقت بسیار زیاد آن موجب استفاده از این روش در این مقاله گردیده است.

کلمات کلیدی: سطح آزاد، اجزای مرزی، محیط متخلخل، سد خاکی، محاسبات عددی

مقدمه

از جمله عوامل مهم در خرابی سدهای خاکی نشت از بدنه و همچنین زیر سد می‌باشد.در سال ۱۹۶۸ باب[۳] و مرنل[۴] لیستی از ۶۰۰ سد که خراب شده‌اند یا حادثه و فاجعه آفرین بوده‌اند را تهیه کرده‌اند. این دو چنین عنوان کرده‌اند که عمده خرابی سدهای خاکی شامل برخورد سطح آزاد نشت با شیب پایین دست سد و یا ایجاد آب شستگی داخلی[۵] توسط جریان نشت درون سد می‌باشد.[۱]

در طی سالهای اخیر روش المان‌های مرزی که تکنیک عددی موثری در حل دسته بزرگی از مسائل تراوش و نشت بوده، در کنار روش‌های اجزای محدود و تفاضل‌های محدود بوجود آمده است. در این روش همانگونه که از اسم آن مشخص است فقط نیاز به مدل کردن مرزهای ناحیه مورد نظر بوده که باعث کاهش ابعاد مسئله می‌گردد. بعلاوه نمایش معادلات انتگرال مرزی یک فرمولاسیون دقیق مساله است و تقریبات فقط در طی حل عددی معادلات انتگرالی وارد می‌شود. این روش به خصوص در حل مسائل محیط‌های بینهایت و یا نیمه بینهایت مناسب است. این روش برای معادلاتی خاص مانند معادلات‌هارمونیک و یا معادلات بای‌هارمونیک کاربرد دارد و به طور کلی برای معادلاتی نظیر معادله پواسون به خوبی کار خواهد کرد.

---

۱ سرپرست واحد مهندسی رودخانه و GIS شرکت مهندسین مشاو پدیدآب سپاهان
۲ استاد دانشگاه شهید چمران اهواز

3 -Mernel
4 -Babb
5 -Piping

معادلات حاکم:

اولین بار ریچاردز ۱، معادله دیفرانسیل جزئی حرکت سیال در محیطهای متخلخل را با ترکیب کردن دو معادله پیوستگی و دارسی ارائه کرد[۲]و[۳] برای این کاراصل بقای جرم برای یک جزء حجم خاک اشباع نوشته می‌شود و با در نظر گرفتن فرضیاتی معادله پیوستگی جریان آب در خاک بدست می‌آید.

در صورتی که محیط کاملاً اشباع بوده و قانون دارسی برقرار باشد می‌توان بجای مولفه‌های بردار سرعت در معادله پیوستگی جریان از قانون دارسی برحسب شیب آبی استفاده نمود و به این صورت معادله جریان آب در خاک‌های اشباع حاصل می‌شود.

$$u=-K_x\frac{\partial h}{\partial x} \quad , \quad v=-K_y\frac{\partial h}{\partial y} \quad , \quad w=-K_z\frac{\partial h}{\partial z} \tag{۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=-m\frac{\partial h}{\partial t} \tag{۲}$$

معادله (۲) کلی ترین حالت حرکت آب در خاک‌های اشباع می‌باشد. رابطه ریچاردز از معادلات ناویر استوکس قابل استخراج می‌باشد.(این رابطه جداگانه توسط بیر[۲] در سال ۱۹۷۲ و ایگلسون[۳] در سال ۱۹۷۰بدست آمده است.[۴]) با این حال این رابطه دارای تعدادی پارامتر ناشناخته می‌باشد که به وضعیت تخلخل و مشخصات مکانی خاک بستگی دارد.[۵]

با فرض جریان دوبعدی، اشباع، ماندگار و سیال غیر قابل تراکم، و همچنین خاک همگن دوحالت زیر را می‌توان در نظر گرفت :

الف) حالت خاک غیرهمسان :

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(K_y\frac{\partial h}{\partial y})=0 \tag{۳}$$

ب) حالت خاک همسان :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \tag{۴}$$

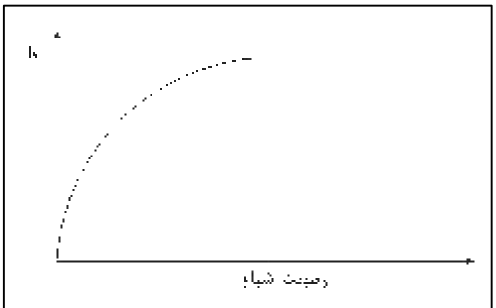
رابطه (۴) همان معادله لاپلاس می‌باشد.

همچنین در حالت غیرماندگار می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)=m\frac{\partial h}{\partial t} \qquad , \qquad m=\frac{\partial \theta}{\partial h} \tag{۵}$$

که KX و KY هدایت هیدرولیکی[۴] در جهت‌های مختلف و یانفوذپذیری در جهت‌های مختلف می‌باشد.

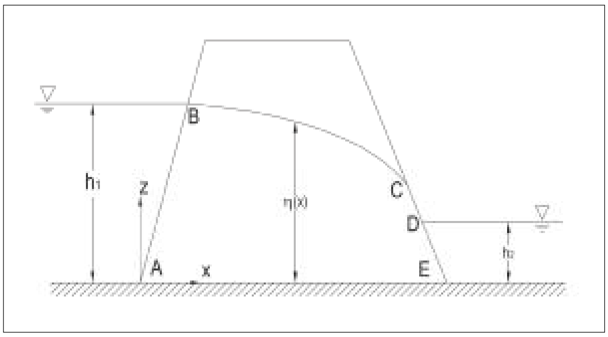
در رابطه بالا θ درصد رطوبت می‌باشد که رابطه آن با K به صورت تصویر شمارهٔ (۱) می‌باشد.



تصویر شمارهٔ (۱): رابطه بین k و θ

1 - Richards
2 - Bear
3 - Eagleson
4 - Hydrulic Conductivity

شرایط مرزی یک سد خاکی همگن در تصویر شمارهٔ (۲) نمایش داده شده است.



تصویر شماره (۲): نمایش شرایط مرزی در یک سد خاکی

با توجه به تصویر فوق شرایط مرزی به طور کلی در دو دسته طبقه بندی می‌گردد:

۱- شرایط مرزی دریچلت[1] :

$$h = h_b \qquad \Omega_1 \in \Omega \tag{۶}$$

در رابطه بالا Ω مرز مسئله است و$\Omega 1$ آن قسمت از مرز مسئله که در آن شرط مرزی دریچلیت برقرار است وh پتانسیل جریـان در طول مرز $\Omega 1$ است و hb مقدار ثابت پتانسیل جریان در طول مرز $\Omega 1$ است. در این شرط مرزی مقدار پتانسیل در طول مرز ثابت می‌باشد. این شرایط مرزی در تصویر در طول مسیرهای AB و DE برقرار است.

۲- شرایط مرزی نیومان[2] :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = -q_b \qquad \Omega_2 \in \Omega \tag{۷}$$

در رابطه بالا Ω مرز مسئله است و$\Omega 2$ آن قسمت از مرز مسئله که در آن شرط مرزی نیومان برقرار است و $\partial h/\partial n$ مشتق نرمال پتانسیل جریان در طول مرز $\Omega 2$ است و qb مقدار ثابت مشتق نرمال پتانسیل جریان در طول مرز $\Omega 2$ است. در این شرط مرزی مقدار مشتق نرمال پتانسیل در طول مرز ثابت می‌باشد. این شرایط مرزی در تصویر در طول مسیرAE برقرار است. همچنین در طول مسیر BC شرایط زیر صادق است:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0 \ , \ h = \eta \tag{۸}$$

روش حل عددی:

لس[3] و فرانکلین[4] اثبات کردند، در یک دامنه پیوسته با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان نوشت:[۶]

$$\oint_{\Omega} (\nabla . v) d\Omega = \oint_{\Gamma} v.n \, d\Gamma \tag{۹}$$

در رابطه بالا ∇ یک اپراتور برداری است و v یک بردار مشتق پذیر است و Ω دامنه انتگرال گیری که برای مسایل سه بعـدی یـک حجم و برای مسایل دو بعدی یک سطح می‌باشد. Γ مرز دامنه Ω که برای مسایل سه بعدی یک سطح و برای مسایل دو بعدی یـک خط می‌باشد. $d\Omega$ المان روی کل دامنه که برای مسایل سه بعدی یک المان حجمی‌و برای مسایل دو بعدی یک المان سطحی است.
براساس رابطه بالا می‌توان معادله شمارهٔ (۴) را با توجه به تصویر شمارهٔ (۳) به صورت زیر تبدیل نمود [۷]:

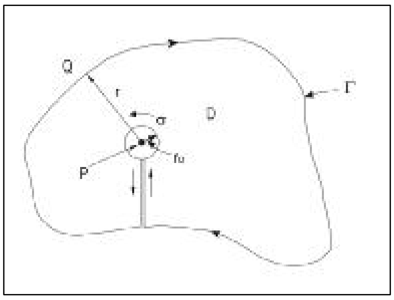
[1] - Dirichlet
[2] - Neumann
[3] - Lass
[4] - Franklin

$$-h(P)=\int_{\Gamma}\left[h(Q)\frac{\partial}{\partial n}(h^{*})-h^{*}\frac{\partial}{\partial n}h(Q)\right]ds \quad (۱۰)$$

که در رابطه بالا h^* تابع حل اساس است. گرینبرگ[1] برای تعیین تابع حل اساسی از رابطه زیر استفاده نمود:[۲۹]

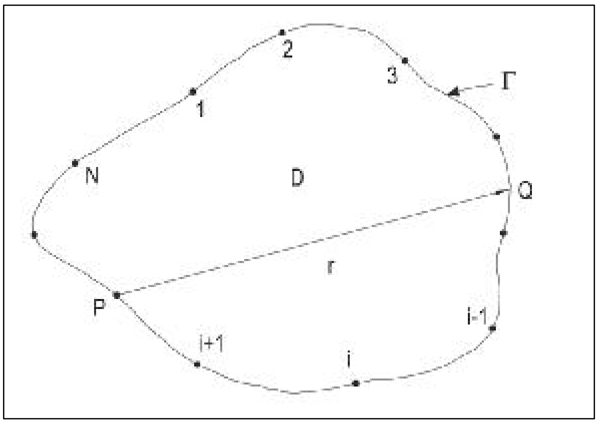
$$h^{*}=\frac{1}{2\pi}Ln\frac{1}{r} \quad (۱۱)$$

که در این رابطه r فاصله بین نقطه مشخص P از سایر نقاط مانند Q روی دامنه دوبعدی است.



تصویر شماره (۳): نمایش رابطه بین یک نقطه و مرز در روش اجزای مرزی

با توجه به رابطه بالا اگر h و $\partial h/\partial n$ همه جا روی Γ مشخص باشد می‌توان h را در هر نقطه داخلی با یک انتگرال گیری خطی بدست آورد. همچنین می‌توان معادله بالا را یکبار برای هر نقطه از مرز نیز نوشت و بدین ترتیب به تعداد مساوی معادله و مجهول ایجاد خواهد شد که به راحتی قابل حل می‌باشد.



تصویر شماره (۴): روش تقسیم کردن مرز به تعدادی المان و شماره گذاری آنها

با گسسته سازی معادله بالا مطابق تصویر شمارهٔ (۴) معادله زیر ایجاد خواهد شد:

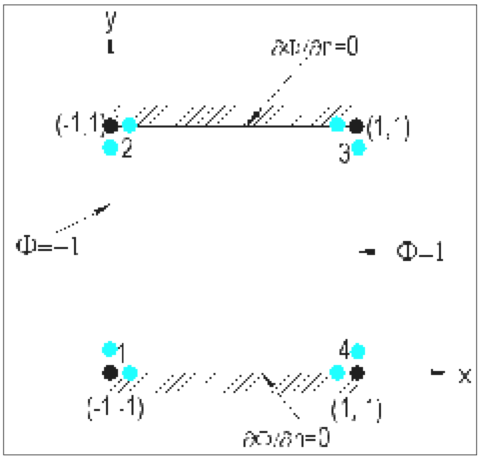
$$-\frac{1}{2}h_i=\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j}\left(h_j\frac{\partial h^{*}}{\partial n}-h^{*}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_j\right)d\Gamma_j \quad (۱۲)$$

که در رابطه بالا C براساس نوع نقطه (مرزی نرم – مرزی سخت – داخلی) تعیین می‌گردد و

$$a_{ij}=\oint_{\Gamma_j}\left(\frac{\partial h^{*}}{\partial n}\right)_{ij}d\Gamma_j \quad , \quad b_{ij}=\oint_{\Gamma_j}\left(h^{*}_{ij}\right)d\Gamma_j \quad (۱۳)$$

برای مثال در صورتی که محیطی مانند تصویر شمارهٔ (۵) در نظر گرفته شود:

[1] - Greenberg



تصویر شماره (۵): نمایش موقعیت گره‌ها در حل مسئله پتانسیل در یک مربع

با دسته بندی مناسب می‌توان نوشت:

$$|R|\{h\}=|L|\left\{\frac{\partial h}{\partial n}\right\} \tag{۱۴}$$

در اینجا شرایط مرزی اعمال می‌شود، یعنی:

$$|R|\begin{Bmatrix}-1\\-1\\h_3\\h_4\\1\\1\\h_7\\h_8\end{Bmatrix}=|L|\begin{Bmatrix}\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_1\\\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_2\\0\\0\\\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_5\\\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)_6\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{۱۵}$$

با دسته بندی معلومات و مجهولات می‌توان نوشت:

$$|H|\{u\}=\{r\} \tag{۱۶}$$

که در معادله بالا $[H]$ ماتریس سختی است که در به عنوان ماتریس مجهولات شناخته می‌شود و همچنین $\{r\}$ ماتریس معلومات است. که با حل رابطه بالا می‌توان مجهولات را محاسبه نمود.

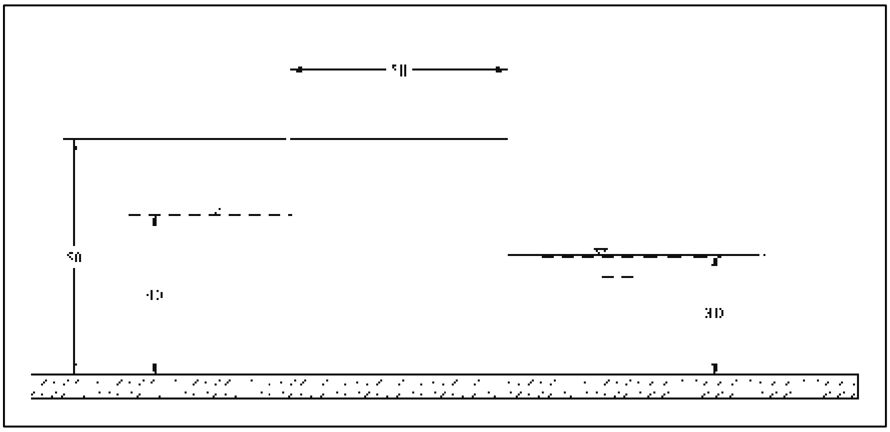
در صورتی که محیط همگن و همسان نباشد توسط تبدیل محورهای مختصات و چرخش محورهای مختصات و همچنین ناحیه بندی محیط می‌توان آن محیط را توسط همین روش حل نمود، فقط با توجه به اینکه در مرز بین ناحیه‌ها هم پتانسیل و هم مقدار مشتق نرمال مجهول می‌باشد نیاز به استفاده از معادلات سازگاری بین لایه‌ها می‌باشد که این معادلات به صورت زیر است:

$$h_1=h_2 \quad , \quad K_1\frac{\partial h_1}{\partial n}=-K_2\frac{\partial h_2}{\partial n} \tag{۱۷}$$

مثال شمارهٔ ۱

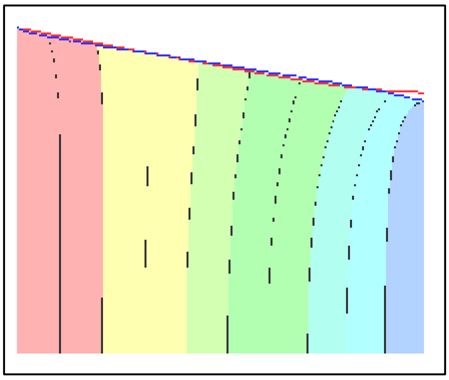
یک سد خاکی مستطیلی مطابق تصویر زیر در نظر گرفته می‌شود. ارتفاع سد برابر ۵۰ متر طول پی آن برابر ۵۰ متـر و ارتفـاع آب در پایین دست سد برابر ۳۰ متر و در بالادست سد برابر ۴۰ متر می‌باشد. هدایت هیدرولیکی K1=0.001 می‌باشد. براسـاس معادلـه دوپویی در حالت دو بعدی می‌توان سطح آزاد نشت را براساس معادله زیر محاسبه نمود:[۸]

$$h = \sqrt{h_1^2 - \left(h_1^2 - h_2^2\right)\frac{x}{L}} \qquad (۱۸)$$

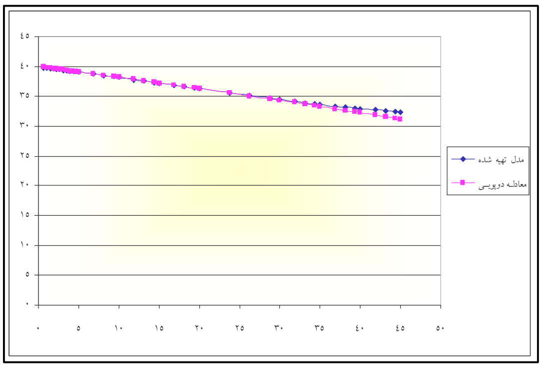


تصویر شماره (۶): تصویر محیط متخلخل استفاده شده در مثال شمارهٔ ۱

پس از حل مثال توسط مدل نتایج آن با برنامه Geoseep و معادله دوپویی مقایسه شده است.



تصویر شماره (۷): مقایسه سطح آزاد در مدل و Geoseep همچنین خطوط هم پتانسیل در مثال شمارهٔ ۱



تصویر شماره (۸): مقایسه سطح آزاد در مدل و حل دوپویی در مثال شمارهٔ ۱

نتیجه گیری:

به طور کلی می‌توان مزایای روش اجزای مرزی را نسبت به سایر روش‌ها به صورت زیر دسته بندی نمود:

زمان لازم برای مدل کردن مساله بسیار کمتر است.

برنامه‌های نوشته شده با این روش به حافظه کمتری نیاز دارند.

زمان تحلیل برنامه‌های نوشته شده با این روش بسیار کمتر است.

معادله دیفرانسیل به‌دست آمده با این روش به صورت تحلیلی قابل حل است و تمام تقریب‌ها محدود به مرزها است و بنابراین در این حالت کاربر تنها کافی است المان‌های روی مرز را انتخاب کرده و متغیرها را روی این مرزها با دقت مشخص نماید.

با این وجود روش اجزای مرزی دارای معایبی نیز می‌باشد که می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

بررسی جریان در محیط غیر اشباع (مسئله غیر خطی و کاملاً غیر هموژن) بسیار دشوار است. برای این مسئله ترکیب روش اجزای محدود و اجزای مرزی جواب‌های دقیق تری می‌دهد و به نظر مناسب تر می‌رسد.

اگرچه در روش اجزای مرزی ماتریس دستگاه معادلات بسیار کوچکتر از سایر روش‌های عددی می‌باشد ولی این ماتریس ضرایب کاملاً پر است ولی در سایر روش‌ها مثلاً اجزای محدود بسیاری از ضرایب این ماتریس صفر می‌باشد و بنابراین با استفاده از روش‌های خاص می‌توان دستگاه را بطور جزئی حل نمود.

منابع و مأخذ:

۱. کمیته ملی سدهای بزرگ ایران(ICOLD). (۱۳۷۵). تراوش در پی سد و شیوه‌های کنترل آن. انتشارات وزارت نیرو، دفتر فنی آب.

۲. شریفی، الهام. (۱۳۸۲). تحلیل زیر تراوش با استفاده از روش المان مرزی. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف.

3. Bobb, A.O. and Mernel, T.W. (1968). Catalog of dam disasters, failures and accidents, U.S. Bureau of Reclamation, Washington, D.C.

4. Richards, L. A., (1931), "Capillary conduction of liquids through porous mediums", Physics, 1, 318-333.

5. Richards, L. A., (1954), "Din gnosis and Improvement of saline and Alkali soils", U. S. Dept. Agr. Hand book 60.

6. Eagleson, P.S. (1970). Dynamic Hydrology. McGraw Hill.

7. Bear, j. and G, Dagan. (1972). Dynamics of Fluids in porous media .American Elsevier.

8. Franklin, P. (1944). Methods of advanced Calculus. New York: McGraw Hill.

9. Liggett, James. (1983). THE BOUNDARY INTEGRAL EQUATION METHOD FOR POROUS MEDIA FLOW, London George ALLEN&UNWIN.

10. Dupuit, J. (1863). Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans les canaux decouverts et a travers les terrains permeables, Paris.