مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت: مقایسه کاربردی تابع جریمه و تابع تواتر مؤثر

عباس بابازاده[۱]، محمد حمید میربها[۲]

۱- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران تلفن: ۶۱۱۱۲۱۷۶-۰۲۱، فاکس: ۶۶۴۰۳۸۰۸-۰۲۱

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد راه و ترابری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران تلفن: ۴۴۴۲۰۵۸۱-۰۲۱

ababazadeh@ut.ac.ir

خلاصه

برای حل مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت ناوگان دو راهکار پیشنهاد شده است که اولی افزودن یک نوع تابع جریمه متقارن وابسته به جریان به زمان سفر ثابت کمانها و دومی استفاده از یک تابع تواتر نامقارن وابسته به جریان به جای تواتر ثابت است. در این مقاله مسئله تخصیص همگانی تعادلی متراکم برای شبکه‌ای آزمایشی با استفاده از دو تابع جریمه و تواتر موثر فوق حل و نتایج کاربرد آنها مقایسه خواهد شد. تعیین شرایطی که عملکرد دو تابع برای در نظرگیری ظرفیت وسایل نقلیه مشابه هم خواهد بود از دیگر نتایج این مقاله است.

کلید واژه‌ها: تخصیص همگانی، محدودیت ظرفیت ، شبکه‌های متراکم.

مقدمه

برنامه‌ریزی سیستمهای حمل‌ونقل همگانی شهری نیازمند استفاده از مدلهای تخصیص همگانی به منظور برآورد توزیع مسافر بین خطوط همگانی است. این مدلها در دو دهه اخیر پیشرفت چشمگیری داشته‌اند ولی در آنها به مسئله تراکم (شلوغی) ناشی از ظرفیت محدود وسایل نقلیه همگانی و اثرات آن بر روی توزیع جریان در خطوط توجه کمتری صورت گرفته‌است.

اثرات تراکم به دو روش در مسئله تخصیص در نظر گرفته شده‌است. اولین روش بر مبنای فرض افزایش زمان سفر مسافر در داخل وسیله نقلیه در اثر افزایش تراکم مسافر است. برای نمونه، تراکم در خطوط سریع‌السیر موجب افزایش سوار شدن مسافران به خطوط معمولی و در نتیجه افزایش زمان سفر داخل وسیله آنان خواهد شد. در این روش زمان سفرهای داخل وسیله به صورت تابعی صعودی از جریان مسافر در نظر گرفته می‌شوند. در روش دوم فرض می‌شود که با افزایش تراکم، ظرفیت باقیمانده وسایل نقلیه کاهش و در نتیجه زمان انتظار مسافر برای سوار شدن به وسایل نقلیه همگانی در خطوط ورودی به ایستگاه افزایش می‌یابد. در این روش تواتر ورود وسایل نقلیه هر خط به ایستگاه به صورت تابعی نزولی ازجریان تعریف می‌شود.

دیال [۱]، فرنساید و دراپر [۲] و لاکلرک [۳] نشان دادند که زمان انتظار در ایستگاههایی که با چندین خط همگانی سرویس داده می‌شود عامل مهمی در انتخاب مسیر مسافران است و راههای ابتکاری گوناگونی را برای ترکیب زمان انتظار و زمان سفر برای محاسبه کوتاهترین مسیر پیشنهاد نمودند. چریکای و روبیلارد [۴] این مفهوم را بیان کردند که در یک شبکه ساده با یک مبدأ و یک مقصد، مسافران می‌توانند زیرمجموعه‌ای از خطوط جذاب بین مبدأ و مقصد را انتخاب و به منظور کمینه کردن مجموع قابل انتظار زمان سفر و زمان انتظار، اولین وسیله متعلق به این خطوط که از مبدأ خارج می‌شود را سوار شوند. این ایده به دو طریق در شبکه‌های عمومی حمل‌ونقل گسترش یافت. اشپیز [۵] و اشپیز و فلورین [۶] ایده اخیر را با ارائه مفهوم استراتژی، که انتخاب مجموعه‌ای از خطوط جذاب در هر ایستگاه است، به شبکه‌های همگانی عمومی گسترش دادند. بر این اساس آنها مسئله تخصیص همگانی غیرمتراکم را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی با تابع هدف مقدار قابل انتظار زمان کلی سفر (شامل پیاده‌روی، انتظار و داخل وسیله) فرموله کردند. در این مدل، چون زمان سفر و تواتر کمانها مقداری ثابت هستند، محدودیت ظرفیت وسایل در نظر گرفته نمی‌شود.

اثرات تراکم به تدریج وارد مدلهای تخصیص همگانی شده است. نگوین و پالوتینو [۷] و اشپیز و فلورین [۶] از جمله اولین پژوهشگرانی هستند که مسئله تخصیص همگانی متراکم را با فرض زمان سفر وابسته به جریان مدل کردند. وو و همکاران [۸] مدل نگوین و پالوتینو را با استفاده از روش ژاکوبی خطی شده برای یک مثال در ابعاد متوسط حل کردند. بوزاینه-ایاری و همکاران [۹] و کامینیتی و کوریا [۱۰] دو فرمولبندی مختلف برای مسئله تخصیص همگانی کاملاً متراکم ارائه داده‌اند که در آنها هم زمان سفر و هم تواتر وابسته به جریان هستند ولی هیچیک روش حل مناسبی برای مسایل واقعی ارائه نداده‌اند. بابازاده و آشتیانی [۱۱] و بابازاده [۱۲] یک مدل کاملاً متراکم پیشنهاد و بر اساس آن مسئله تخصیص همگانی با زمان سفرهای وابسته به جریان و تواترهای ثابت را برای شبکه‌ای واقعی حل کردند. تابع زمان سفری که بابازاده [۱۲] از آن برای در نظرگیری محدودیت ظرفیت وسایل استفاده کرده است نوعی تابع جریمه است. پس از آن، سپدا و همکاران [۱۳] یک فرمولبندی جایگزین برای مدل کامینیتی و کوریا ارائه

و با استفاده از روش میانگین‌گیری متوالی، مسئله تخصیص همگانی با زمان سفر ثابت و تواتر وابسته به جریان (تواتر موثر) را برای شبکه‌های واقعی حل کردند.

هدف این مقاله حل مسئله تخصیص همگانی متراکم برای یک شبکه آزمایشی موجود در ادبیات، با استفاده از تابع جریمه بابازاده [۱۲] و تابع تواتر موثر سپدا و همکاران [۱۳] و مقایسه نتایج کاربرد آنها است. همچنین با تحلیل حساسیت روی پارامترهای موثر این دو تابع، شرایط همگرا شدن آنها برای حصول به نتیجه‌ای یکسان بررسی خواهد شد. در این کار از روش سپدا و همکاران [۱۳] برای حل مسائل تخصیص همگانی استفاده می‌شود.

روش حل سپدا و همکاران

شبکه همگانی $G(I,A)$ که در آن I مجموعه گره‌ها و A مجموعه کمانهای جهت‌دار هستند را در نظر بگیرید. برای هر گره $i \in I$، A_i و A_i^- را به ترتیب مجموعه کمانهای خروجی و ورودی به گره i بنامید. فرض کنید $A^b \subseteq A$ مجموعه کمانهای سوار شدن و $A_i^b \subseteq A^b$ مجموعه گره‌های سوار شدن خروجی از گره i باشند. برای هر کمان $a \in A$، یک زمان سفر غیرمنفی t_a و برای هر کمان سوار شدن $a \in A^b$ یک تواتر مثبت F_a تعریف می‌شود. فرض کنید که مجموعه $I^b \subseteq I$ شامل همه گره‌ها با حداقل یک کمان سوار شدن خروجی بوده و d_r^s تقاضای سفر از گره r به گره s باشد. مجموعه گره‌های با تقاضای ورودی مثبت به آنها مجموعه گره‌های مقصد نامیده شده و با S نشان داده می‌شود. برای هر $s \in S$، فرض کنید x_a^s جریان حاصل از همه سفرها به مقصد s در کمان $a \in A$ و w_i^s کل زمان انتظار برای همه سفرها به مقصد s در گره $i \in I^b$ باشد. کل جریان در کمان a و کل زمان انتظار در گره i را به ترتیب با $x_a = \sum_{s\in S} x_a^s$ و $w_i = \sum_{s\in S} w_i^s$ نشان دهید و تعریف کنید $x^s = (x_a^s)_{a\in A}$ و $x = (x_a)_{a\in A}$.

اشپیز و فلورین [۶] با فرض ثابت بودن t_a (زمان سفر) و F_a (تواتر)، مسئله تخصیص همگانی غیرمتراکم مبنی بر استراتژی را به صورت برنامه خطی زیر که مدل استراتژی بهینه نام دارد، فرمولبندی کردند.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{s\in S}[\sum_{a\in A} t_a x_a + \sum_{i\in I^b} w_i^s] & & \\
s.t. \quad & \sum_{a\in A_i} x_a^s - \sum_{a\in A_i^-} x_a^s = d_i^s & & \forall i \in I\setminus\{s\},\, s\in S, \\
& x_a^s \le F_a w_i^s & & \forall a\in A_i^b, i\in I^b, s\in S, \\
& x_a^s \ge 0 & & \forall a\in A, s\in S.
\end{aligned} \qquad (P)
$$

این پژوهشگران نشان دادند که هر جواب حدی (P) معادل است با اینکه همه تقاضا از هر گره $i \in I\setminus\{s\}$ به هر مقصد s از یک کوتاهترین استراتژی (استراتژی با کمترین امید زمان سفر) یکسان استفاده کنند. آنها نشان دادند که اگر $u^s = (u_i^s)_{i\in I\setminus\{s\}}$ بردار متغیرهای همزاد محدودیت اول (P) باشد، آنگاه u_i^s کمترین امید زمان سفر از گره i به مقصد s است. سپس به کمک شرایط کمبود تکمیلی در برنامه‌ریزی خطی، روش حلی برای یافتن یک جواب حدی $(x^s,u^s)_{s\in S}$ ارائه دادند که سختی آن از درجه مسئله کوتاهترین مسیر است. از این دستور حل در نرم افزار EMME/2 [۱۴] استفاده شده است.

سپدا و همکاران [۱۳] با در نظر گرفتن t_a و F_a وابسته به جریان، نشان دادند که مسئله تخصیص همگانی کاملاً متراکم مبتنی بر استراتژی را می‌توان بر حسب تابع شکاف مبتنی بر استراتژی $SG(x)$، به صورت مسئله بهینه‌سازی غیرخطی زیر فرمولبندی کرد.

$$
\begin{aligned}
Min \quad & SG(x) & & \\
s.t. \quad & \sum_{a\in A_i} x_a^s - \sum_{a\in A_i^-} x_a^s = d_i^s & & \forall i \in I\setminus\{s\},\, s\in S, \\
& x_a^s \ge 0 & & \forall a\in A, s\in S. \\
& x_a := \sum_{s\in S} x_a^s & & \forall a\in A.
\end{aligned} \qquad (M)
$$

تابع شکاف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$SG(x) := \frac{TC(x) - \sum_{s\in S}\sum_{i\in I\setminus\{s\}} d_r^s u_r^s}{TC(x)}, \qquad (۱)$$

که در آن،

$$TC(x) := \sum_{s\in S}[\sum_{a\in A} t_a(x)\, x_a^s + \sum_{i\in I^b} \underset{a\in A_i^b}{Max}(x_a^s / F_a(x))] \qquad (۲)$$

کل (امید) زمان سفر مربوط به جریان x و u_i^s کمترین امید زمان سفر از i به s به ازای $t_a = t_a(x)$ و $F_a = F_a(x)$ است. آنها نشان دادند که تابع شکاف فوق در جواب بهینه (M) برابر صفر است. به سادگی می‌توان نشان داد که به ازای t_a و F_a ثابت (P) و (M) معادل یکدیگرند.

سپدا و همکاران [۱۳] از روش میانگین‌گیری متوالی برای حل (M) استفاده کردند. در هر تکرار k این روش، ابتدا مدل خطی (P) با ثابت گرفتن زمان سفرها و تواترها در جریان فعلی x^k حل و سپس میانگین جواب به دست آمده $\hat{x}$ و جواب تکرار قبلی به عنوان جواب جدید x^{k+1} جایگزین می‌شود. مدل غیرمتراکم (P) را می‌توان با استفاده از روش اشپیز و فلورین [۶] یا روش کامینیتی و کوریا [۱۰] حل کرد.

بیان رسمی روش حل سپدا و همکاران به شرح زیر است:

شروع : جواب امکانپذیر x^0 را تعیین کنید و قرار دهید $k \leftarrow 0$.

تا زمانیکه $SG(x^k) > \varepsilon$ است **انجام دهید** :

- محاسبه کنید $t_a = t_a(x^k)$ برای $a \in A$ و $F_a = F_a(x^k)$ برای $a \in A^b$.
- کوتاهترین استراتژی را برای هر گره مقصد $s \in S$ محاسبه کنید.
- جریان کمکی $\hat{x}$ را تعیین کنید.
- قرار دهید $x^{k+1} = (1 - \frac{1}{k+1})x^k + \frac{1}{k+1}\hat{x}$.
- قرار دهید $k \leftarrow k+1$.

توقف : x^k یک جواب با شکاف $SG(x^k) \le \varepsilon$ است.

نقطه شروع x^0 را می‌توان با انجام یک تخصیص جریان همه یا هیچ، با استفاده از کوتاهترین استراتژی‌های محاسبه شده با زمان سفرها $t_a = t_a(0)$ و تواترهای $F_a = F_a(0)$ به دست آورد.

معرفی تابع تواتر موثر و تابع جریمه

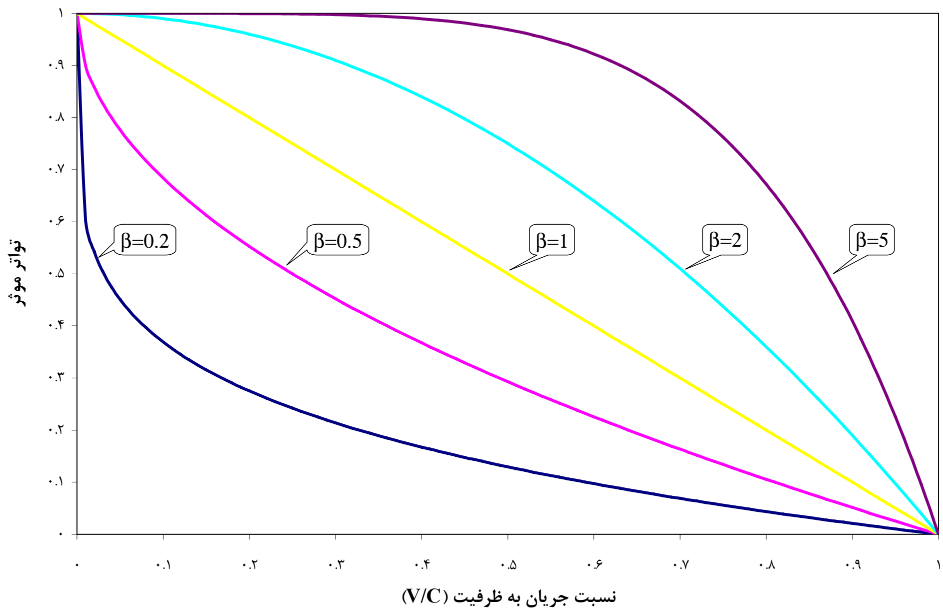
سپدا و همکاران [۱۳] تابع تواتر موثر هر کمان سوار شدن b را که نظیر یک ایستگاه از یک خط مفروض است، به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$F_b(x) = \begin{cases} F_\circ[1 - (\frac{x_b}{F_\circ c - x_a + x_b})^\beta] & if \quad x_a / F_\circ c < 1 \\ 0 & else \end{cases} \qquad (۳)$$

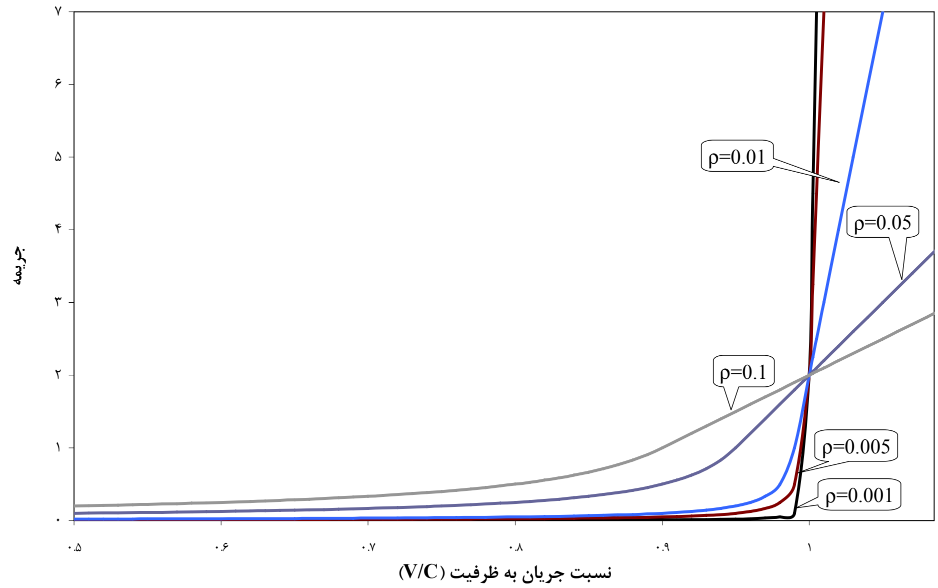
که در آن x_b جریان سوار شدن در ایستگاه، x_a جریان داخل وسیله بلافاصله پس از ایستگاه، $F_\circ$ تواتر اسمی خط، c ظرفیت هر وسیله نقلیه خط و β یک پارامتر غیرمنفی است. این پژوهشگران در عمل از مقدار $\beta = ۰/۲$ استفاده کرده‌اند. طبق رابطه فوق، تواتر موثر در جریان صفر برابر تواتر اسمی است و با افزایش جریان نزول می‌کند، بطوریکه وقتی جریان برابر ظرفیت خط ($F_\circ c$) شود مقدار آن صفر می‌شود.
شکل ۱ تغییرات تواتر موثر را نسبت به متغیر جریان به ظرفیت ($V/C = x_a / F_\circ c$) به ازای مقادی مختلف β نشان می‌دهد. در این شکل برای سهولت $x_a = x_b$ فرض شده است(که در ایستگاه اول هر خط برقرار است). درضمن با تقسیم تواتر موثر به تواتر اسمی ($F_a(x) / F_\circ$) تابع تواتر موثر مقیاس شده است.
بابازاده [۱۲] برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ناوگان در مسئله تخصیص همگانی، تابع جریمه زیر را به زمان سفر هر کمان داخل وسیله a نظیر هر خط اضافه می‌کند:

$$\tau_a(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1 - \dfrac{x_a}{F_\circ c}} & if \quad x_a / F_\circ c < 1 - \rho \\ \alpha \dfrac{x_a}{F_\circ c} + \beta & else \end{cases} \qquad (۴)$$

در این رابطه x_a جریان داخل وسیله و $0 < \rho < 1$ پارامتر جریمه است که انتخاب هرچه کوچکتر آن دقت در نظرگیری ظرفیت را افزایش می‌دهد. پس از تعیین ρ (با توجه به دقت مورد نیاز)، دو پارامتر α و β به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که تابع جریمه در نقطه انفصال $x_a / F_\circ c = 1 - \rho$ پیوسته مشتق‌پذیر باشد. برای برقراری این شرط باید $\alpha = 1/\rho$ و $\beta = 2 - 1/\rho$ باشند.
طبق رابطه (۴) مقدار جریمه در جریان صفر برابر صفر است و با افزایش جریان ابتدا به تدریج و پس از رسیدن جریان به نزدیکی ظرفیت، به شدت افزایش می‌یابد. شکل ۲ تغییرات جریمه را نسبت به متغیر جریان به ظرفیت برای مقادیر مختلف ρ نشان می‌دهد.



شکل ۱- منحنی تغییرات تابع تواتر موثر نسبت به جریان سوار شدن



شکل ۲- منحنی تغییرات تابع جریمه نسبت به جریان داخل وسیله

مقایسه تابع تواتر موثر و تابع جریمه

استفاده از تابع تواتر موثر و تابع جریمه در حل مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت بر مبنای دو نگرش متفاوت به مسئله بنـا نهـاده شـده‌انـد. تابع تواتر موثر مبتنی بر کاهش عملی تواتر هر خط در هر ایستگاه در اثر افزایش تعداد مسافر سوار شده به آن خط در آن ایستگاه است، در حالیکه تابع جریمه مبتنی بر افزایش زمان سفر هر خط بین هر دو ایستگاه در اثر افزایش تعداد مسافر در داخل وسیله آن خط بین آن دو ایستگاه می‌باشد. هر چند که به نظر میرسد تابع تواتر تواتر موثر نسبت به تابع جریمه تطابق بیشتری با واقعیت مسئله داشته باشد، ولی استفاده از آن موجب سخت‌تر شدن حـل مسئله میشود. زیرا، تواتر موثر هر کمان سوار شدن علاوه بر جریان همان کمان(x_b) به جریان کمان داخل وسیله پس از آن (x_a) نیز وابسته می‌باشد، و در نتیجه مسئله تخصیص همگانی با تابع تواتر موثر یک مسئله تخصیص نامتقارن است. این در حالی است که مقدار جریمه هر کمـان داخـل وسـیله (x_a) صرفاً به جریان در همان کمان وابسته است، و لذا مسئله تخصیص همگانی با تابع جریمه یک مسئله متقارن خواهد بـود. روشـن اسـت کـه حـل

مسایل تخصیص نامتقارن به مراتب سخت‌تر از حل مسایل تخصیص متقارن می‌باشد.
همانطور که در شکل ۱ روشن است، تابع تواتر مؤثر برای مقادیر کوچک پارامتر β با افزایش جزئی جریان از مقدار صفر بشدت نزول می‌کند. برای نمونه، به ازای $\beta = ۰/۲$ (مطابق سپدا و همکاران[۱۳])، تواتر موثر در جریانی معادل ۵٪ ظرفیت خط کمتر از ۵۰٪ تواتر اسمی است که منطقی بنظر نمی‌رسد. در عمل مناسبتر است که تواتر موثر در جریانهای زیر ظرفیت کاهشی بسیار خفیف، و به محض رسیدن جریان به ظرفیت و پس از آن به سرعت کاهش یابد. خصوصیت اخیر تابع تواتر مؤثر با افزایش هر چه بیشتر پارامتر β شدیدتر خواهد شد. در عمل بهتر است که از مقادیر β بزرگتر از یک استفاده شود تا شکل منحنی این تابع تابع تواتر مؤثر محدب باشد.
در حل مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت، امکان وجود شرایطی که عملکرد هر دو تابع تواتر مؤثر و جریمه از این منظر یکسان باشد دور از ذهن نیست. تعیین چنین شرایطی معادل با تعیین پارامتر جریمه (ρ) مناسب برای حل مسئله است. با تعیین چنین مقداری برای پارامتر ρ، تابع جریمه را می‌توان به عنوان جایگزینی مناسب بجای تابع تواتر مؤثر در مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیت مورد استفاده قرار داد، که در ضمن حل مسئله را نیز ساده‌تر می‌کند. تحقیق چنین شرایطی در بخش بعدی برای شبکه آزمایشی سایوکس فالز (که در ادبیات حمل و نقل شناخته شده است) صورت خواهد گرفت.

نتایج عددی

روش حل پیشنهادی سپدا و همکاران [۱۳] به صورت یک برنامه کامپیوتری در WATCOM C++ ویرایش ۹/۵ نوشته شد. شبکه مثال این مقاله شبکه همگانی سایوکس در مرجع [۱۲] است. این شبکه همگانی شامل ۱۰ خط دو طرفه است که روی شبکه معابری با ۴۸ گره و ۱۲۴ کمان و ۵۵۰ زوج مبدأ – مقصد با تقاضای مثبت تعریف میشود.
جداول ۱ و ۲ نتایج اجرای برنامه روی شبکه سایوکس فاز را به ترتیب برای دو حالت استفاده از تابع تواتر مؤثر و تابع جریمه نشان می‌دهند، که در آنها کل زمان سفر در هر اجرا برابر مجموع زمانهای انتظار، پیاده‌روی، داخل وسیله و سوار شدن برای تمام مسافران می‌باشد. جدول ۱ نتایج تخصیص همگانی با تابع تواتر مؤثر را برای مقادیر مختلف پارامتر β نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با افزایش β از ۰/۲ به ۵ کل زمان سفر کاهش، و دقت جواب (از نظر در نظرگیری ظرفیت)، با میل بیشینه V/C از بالا به سمت ۱، افزایش می یابد. این در حالی است که تعداد تکرار دستورحل افزایش و در نتیجه زمان حل بیشتر می‌شود. در نهایت برای $\beta = ۵$ دستورحل پس از ۱۸ تکرار به جوابی با کل زمان سفر ۲۷۲/۹۴۱ و خطای کمتر از ۵٪ می‌رسد.

جدول ۱- نتایج تخصیص همگانی با تابع تواتر مؤثر

تعداد تکرار	کل زمان سفر	تعداد سوار شدن	اجزای زمان سفر				نسبت جریان به ظرفیت (V/C)			β
			سوار شدن	داخل وسیله	پیاده‌روی	انتظار	میانگین	کمینه	بیشینه	
۳۰	۳۶۸,۷۹	۲۲۳	۳,۷۱۹	۸۴,۶۱۷	۲۰۳,۶۹	۷۶,۷۶۴	۰,۳۵۶۶	۰,۰۵۵۶	۰,۸۱۱۶	۰,۲
۱۶	۳۳۴,۳۸۸	۳۲۱	۵,۳۴۳	۱۱۰,۸۰۸	۱۳۴,۱۱۶	۸۴,۱۲۱	۰,۴۷۳۵	۰,۱۰۸۷	۰,۹۰۰۳	۰,۵
۱۳	۳۱۰,۸۲۵	۳۸۴	۶,۴۰۶	۱۲۲,۲	۱۰۱,۱۹۵	۸۱,۰۲۴	۰,۵۳۰۸	۰,۱۰۷	۰,۹۴۶۶	۱
۱۰	۲۸۹,۱۴۲	۴۲۲	۷,۰۳۲	۱۲۹,۸۲۷	۸۲,۰۱۹	۷۰,۲۶۴	۰,۵۶۵	۰,۶	۰,۹۶۰۹	۲
۱۸	۲۷۲,۹۴۱	۴۳۴	۷,۲۳۲	۱۳۲,۹۶۱	۷۲,۷۵۱	۵۹,۹۹۷	۰,۵۷۸۹	۰,۱۰۷	۰,۹۸۴۶	۵

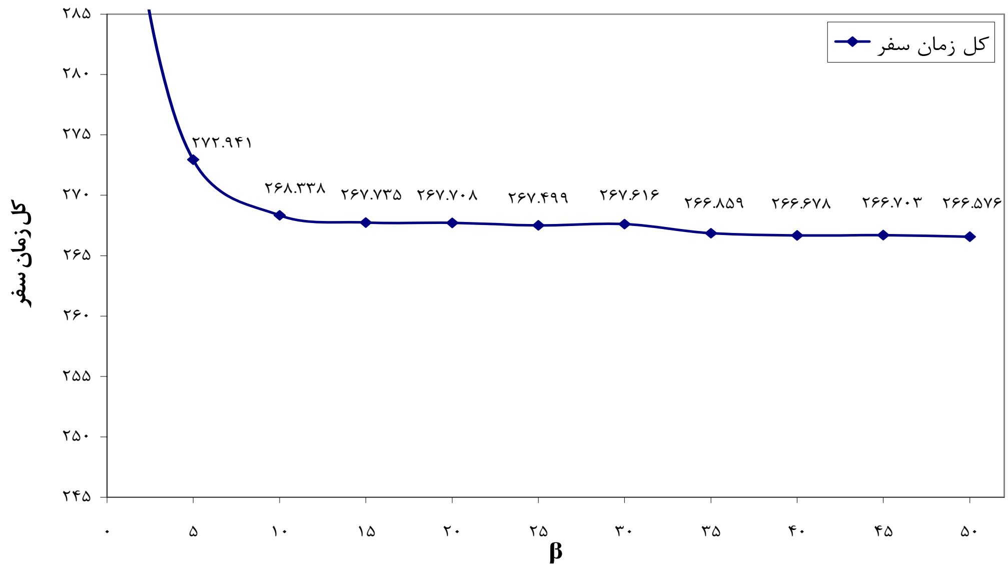
جدول ۲- نتایج تخصیص همگانی با تابع جریمه

تعداد تکرار	کل زمان سفر	تعداد سوار شدن	اجزای زمان سفر				نسبت جریان به ظرفیت (V/C)			ρ
			سوار شدن	داخل وسیله	پیاده‌روی	انتظار	میانگین	کمینه	بیشینه	
۳	۲۶۱,۹۵۴	۴۴۵	۷,۴۱۴	۱۳۳,۷۵۳	۶۷,۰۳۹	۵۳,۷۴۸	۰,۵۸۷۴	۰,۰۰۸۳	۱,۲۷۲۷	۰,۱
۳	۲۶۳,۹۵۲	۴۴۰	۷,۳۳۴	۱۳۳,۱۷۴	۶۹,۱۵۳	۵۴,۲۹۱	۰,۵۸۲۲	۰,۰۰۸۳	۱,۲۶۸۹	۰,۰۵
۷	۲۶۳,۳۵	۴۴۶	۷,۴۲۵	۱۳۴,۵۳۹	۶۶,۷۲۷	۵۴,۶۵۹	۰,۵۸۷۹	۰,۰۰۷۱	۱,۰۵۲۳	۰,۰۱
۱۰	۲۶۴,۱	۴۴۶	۷,۴۴	۱۳۴,۹۵۸	۶۶,۴۶۱	۵۵,۲۴۱	۰,۵۸۸۴	۰,۰۰۷۵	۱,۰۳۵۳	۰,۰۰۵
۴۲	۲۶۴,۲۴۵	۴۴۶	۷,۴۴	۱۳۵,۱۲۴	۶۵,۹۰۹	۵۵,۷۷۲	۰,۵۸۹	۰,۰۰۸۲	۱,۰۰۷۳	۰,۰۰۱

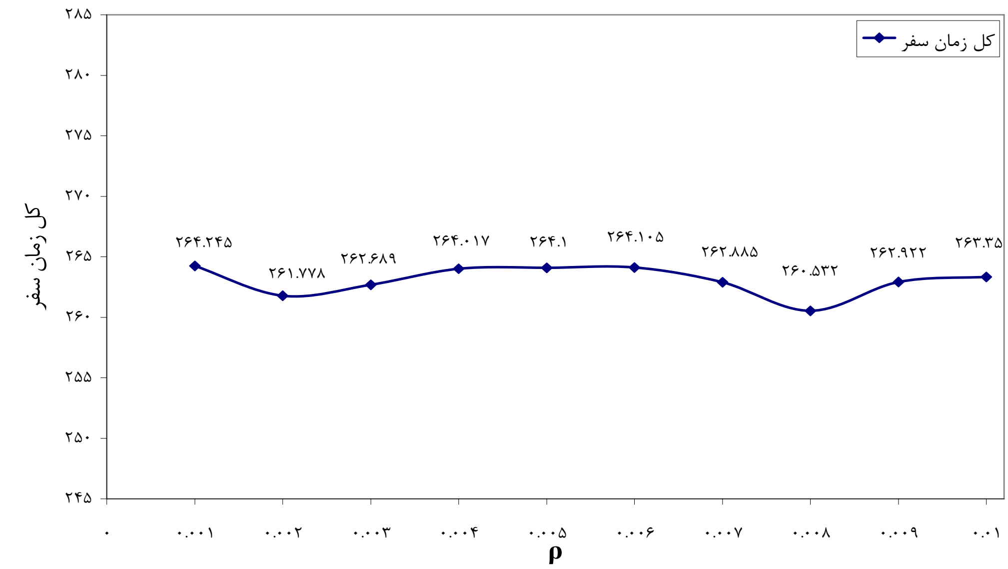
جدول ۲ نتایج تخصیص همگانی با تابع جریمه را برای مقادیر مختلف پارامتر جریمه ρ نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که با کوچک شدن ρ از ۰/۰۱ به ۰/۰۰۱ کل زمان سفر روندی صعودی دارد ولی دقت جواب، با میل بیشینه V/C از پایین به سمت ۱، افزایش می‌یابد. در عین حال، تعداد تکرار دستورحل و بواسطه آن زمان حل مسئله افزایش می‌یابند. همانطور که در این جدول ملاحظه می‌شود، برای $\rho = ۰/۰۰۵$ دستورحل پس از ۱۰ تکرار به جوابی با کل زمان سفر ۲۶۴/۱ و خطای کمتر از ۵٪ می‌رسد. انتخاب دقت بیشتر برای حل مسئله (انتخاب پارامتر جریمه کوچکتر) موجب بالا رفتن تعداد تکرار و زمان حل مسئله خواهد شد، در حالیکه کل زمان سفر تغییر چندانی نمی‌کند. به طور مثال، برای $\rho = ۰/۰۰۱$ دستورحل پس از ۴۲ تکرار به جوابی با دقت کمتر از ۱٪ می‌رسد، ولی کل زمان سفر حاصل از آن که برابر با ۲۶۴/۲۴۵ است با مقدار متناظر آن در $\rho = ۰/۰۰۵$ تقریباً ۰/۰۱ ٪ اختلاف دارد که قابل چشمپوشی است.

تعییرات کل زمان سفر در تخصیص همگانی با تابع تواتر موثر برای مقادیر β از ۵ تا ۵۰ در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، کل زمان سفر با افزایش β روندی کاهشی دارد، به طوریکه در $\beta = ۵۰$ به کمترین مقدار خود در حدود ۲۶۶/۶ می‌رسد. به علاوه ملاحظه می‌شود که کل زمان سفر به ازای $\beta = ۵$ نسبت به مقدار کمینه اخیر کمتر از ۵٪ خطا دارد (کاهش اخیر برای $\beta = ۱$ بیشتر از ۵٪ است). با توجه به آنکه دقت حل مسئله نیز در $\beta = ۵$ کمتر از ۵٪ دیده شده بود، مناسب بودن مقدار ۵ برای پارامتر β در این مقام ارزیابی می‌شود.

شکل ۴ تعییرات کل زمان سفر در تخصیص همگانی با تابع جریمه را برای مقادیر ρ از ۰/۰۰۱ تا ۰/۰۱ نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که کل زمان



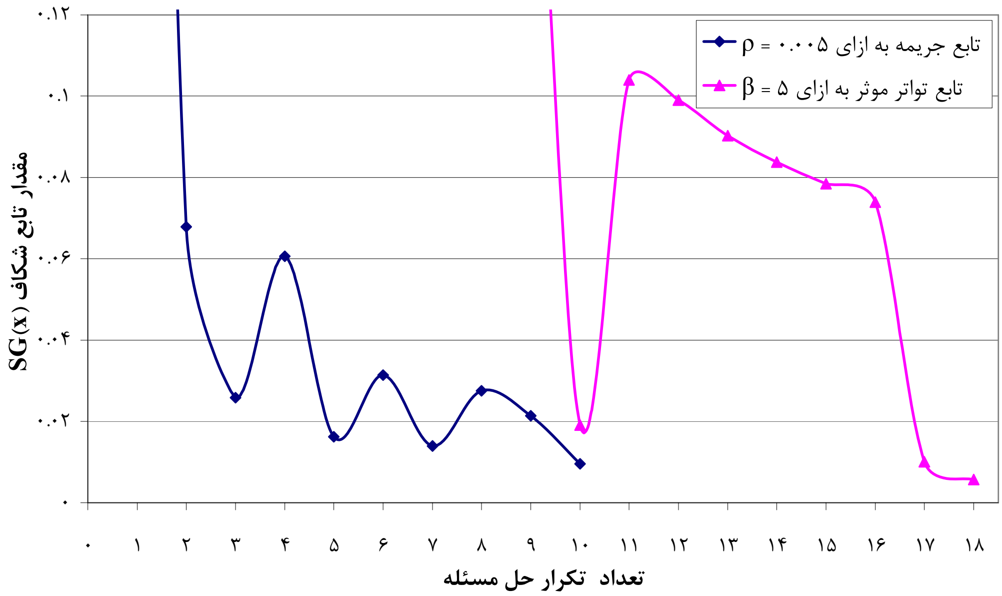
شکل ۳- تغییرات کل زمان سفر در تخصیص همگانی با تابع تواتر موثر



شکل ۴- تغییرات کل زمان سفر در مسئله تخصیص همگانی با تابع جریمه

سفر در این بازه از تعییرات ρ تقریباً ثابت با اختلاف حدود ۱٪ از مقدار ۲۶۴/۱ (مقدار تابع هدف برای $\rho = ۰/۰۰۵$) می‌باشد. بـه عـلاوه، مقـادیر کـل زمان سفر به ازای تمام مقادیر اخیر ρ با آن مقدار برای $\beta = ۵$ (در تخصیص با تابع تواتر مؤثر) کمتر از ۵٪ اختلاف دارند. با توجه به آنکه دقت حـل مسئله در $\rho = ۰/۰۰۵$ کمتر از ۵٪ دیده شده بود، مناسب بودن مقدار ۰/۰۰۵ برای پارامتر ρ در این مقام ارزیابی می‌شود.

پس از تعیین $\beta = ۵$ به عنوان مقداری مناسب برای حل مسئله تخصیص همگانی با تابع تواتر مـؤثر در کاربردهـای عملـی، و تعیـین $\rho = ۰/۰۰۵$ بـه عنوان پارامتر جریمه‌ای که عملکردی به خوبی $\beta = ۵$ دارد، شکل ۵ چگونگی همگرا شـدن جـواب مـسئله تـخصیص همگـانی بـرای شـبکه همگـانی سایوکس فالز را در دو حالت استفاده از تابع تواتر مؤثر و استفاده از تابع جریمه به ازای دو پارامتر اخیر نشان می‌دهد. همانگونه که در این شکل ملاحظه



شکل ۵- نحوه همگرایی دستور حل تخصیص همگانی

می‌شود، در حل مسئله با تابع جریمه، مقدار تابع شکاف در چند تکرار اول به شدت کاهش می‌یابد و در تکـرار ۱۰ بـه مقـدار مناسـب ۱٪ مـی‌رسـد. در حالیکه کاهش تابع شکاف در حل مسئله با تابع تواتر موثر با سرعتی کمتر و پراکندگی بیشتری انجام می‌شود و در نهایت مقـدار ۱٪ بـرای آن در تکـرار ۱۸ حاصل می‌شود، که نشانگر سخت‌تر بودن حل مسئله تخصیص با تابع تواتر مؤثر نسبت به حل آن با تابع جریمه است.

نتیجه گیری

در این مقاله نتایج کاربرد دو نوع تابع تواتر موثر (سپدا و همکاران [۱۳]) و جریمه (بابازاده [۱۲]) در حل مسئله تخصیص همگانی با محدودیت ظرفیـت برای یک شبکه آزمایشی موجود در مراجع مقایسه شدند. این مقایسه نشان داد که، در صورت انتخاب مناسب پـارامتر جریمـه، تـابع جریمـه مـی‌توانـد عملکردی به خوبی عملکرد تابع تواتر مؤثر داشته باشد، در حالی که سرعت حل مسئله را نیز افزایش می‌دهد.

فهرست مراجع

1. Dial, R.B. (1967) Transit pathfinder algorithms. Highway Research Record 205, 67-85.
2. Fearnside, K, Draper, D.P., (1971) Public Transport Assignment - a new approach. Traffic Engineering and Control, 298-299.
3. Le Clercq, F. (1972) A public transport assignment model. Traffic Engineering and Control, 91-96.
4. Chriqui, C., Robillard, P. (1975) Common bus lines. Transportation Science 9, 115-121.
5. Spiess, H. (1984) Contribution à la théorie et aux outils de planification des réseaux de transport urbains. Ph.D. Thesis, Départment d'Informatique et recherché Opérationnelle, Publication 382, CRT, U. de Montréal.
6. Spiess, H., Florian, M. (1989) Optimal Strategies: A new assignment model for transit networks. Transportation Research Part B 23 (2), 107-121.

7. Nguyen, S., Pallotinno, S. (1988) Equilibrium traffic assignment in large scale transit networks. European journal of Operational Research 37 (2), 176-186.
8. Wu, J., Florian, M., Marcotte, P. (1994) Transit equilibrium assignment: a model and solution algorithms. Transportation Science 28 (3), 193-203.
9. Bouzaïne-Ayari, B., Gendreau, M., Nguyen, S. (1995) An equilibrium-fixed point model for passenger assignment in congested transit networks. Technical Report CRT-95-57, U. de Montréal.
10. Cominetti, R., Correa, J. (2001) Common-lines and passenger assignment in congested transit networks. Transportation Science 35 (3), 250-267.
11. Babazadeh, A., Ashtiani, H.Z. (2005) Algorithm for equilibrium Transit Assignment Problem. Transportation Research Record, No. 1923, 227-235.

۱۲. بابازاده، عباس (۱۳۸۳) "مسئله تخصیص همگانی تعادلی در شبکه های متراکم : فرمولبندی و دستور حل"، *تز دکترا*، دانشگاه صنعتی شریف.

13. Cepeda, M., Cominetti, R., Florian, M. (2006) A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria. Transportation Research, V. 40 (B), 437-459.
14. EMME/2 (1999) "User's Manual", Software Release 9, Montreal, Canada.