کاربرد ضرب کارتزین در پایداری سازه های منظم متقارن بدون حرکت جانبی

وفا مرسلی

دانشجوی کارشناسی ارشد سازه دانشگاه علوم و فنون مازندران

vafa.morsali@yahoo.com

خلاصه

در این مقاله کاربرد ضرب کارتزین که یکی از ضربهای تعریف شده در تئوری گرافها است، در محاسبات مربوط به بار بحرانی سازه ها ی منظم متقارن بدون حرکت جانبی نشان داده خواهد شد، با استفاده از تعریف ضرب یک سازه را تجزیه و از خواص آن در جهت محاسبه بار بحرانی استفاده می شود، از روشهای ارائه شده این نتیجه حاصل می شود که بکارگیری این روش باعث می شود تا در مورد سازه های منظم دقت محاسبات بالاتر و زمان انجام محاسبات کوتاهتر شود، با حل یک مثال کارایی این روش به خوبی نشان داده می شود.

کلمات کلیدی: گراف حاصلضرب، ضرب کارتزین، مقادیر ویژه، بار بحرانی، سازه های متقارن

مقدمه

تئوری گرافها یکی از شاخه های ریاضیات است که در سال ۱۷۳۶ توسط اویلر پایه گذاری شد ، مباحث مربوط به گراف یکی از قوی ترین شا خه های ریاضیات است که نظر بسیاری از ریاضی دانان را به خود جلب کرده است، وجود مسائل حل نشده ی فراوان در این زمینه گویای این مطلب است که تا مدتها شاهد پویایی و تحرک در این شاخه از ریاضیات خواهیم بود گرافها در بسیاری از علوم و مهندسی مانند عمران، برق، مکانیک و غیره دارای کاربرد می باشد.

کاربرد گرافها در مباحث مربوط به پایداری و تحلیل دینامیکی سازه های متقارن را می توان در کارهای کاوه و سیاری نژاد [۴]، کاوه و سلیم بهرامی [۵و۶] مشاهده کرد، ضرب گرافها که یکی از مباحث گرافها است در بسیاری از مباحث از جمله مرتب سازی گرهی [۳] ، محاسبه مقدار ویژه دوم و بردار فیدلر [۷] کاربرد دارد، در ابن تحقیق از ضرب کارتزین جهت بدست آوردن مولدهای یک گراف استفاده می شود، همچنین از فرمهای ماتریسی خاص تحت عنوان فرمهای کانونیکال برای تجزیه ماتریسهای اتصال مولدها استفاده کرده و در نهایت پس از تجزیه گراف اصلی از خواص مولدها جهت محاسبه بار بحرانی سازه های منظم بدون حرکت جانبی استفاده می شود، که نتیجه آن کاهس زمان وافزایش دقت محاسبات رایانه ای می باشد.

تعریف

یک گراف S شامل یک مجموعه N(S) از المان‌ها که گره (رأس یا نقطه) و یک مجموعه M(S) از المان‌ها که اعضاء یا لبه‌ها نامیده می‌شود. هر عضو دارای دو گره است که هر دو گره که عضو را تشکیل می‌دهند، انتهاهای آن عضو نامیده می‌شود. اگر دو گره از یک گراف به وسیله‌ی عضوی به هم وصل شوند، آن دو گره را همسایه گویند و یک عضو با یک گره منطبق است اگر آن گره یک انتها برای آن عضو باشد. دو عضو در صورتی منطبق هستند اگر آن دو عضو حداقل در یک گره‌ی انتهایی با هم مشترک باشند.

درجه یک گره n_i که با $\deg(n_i)$ نوشته می‌شود، برابر است با تعداد اعضایی که به آن گره منطبق است.

یک زیرگراف Si از گراف S، یک گراف است به طوری که :

$M(Si), M(S), N(Si), N(S)$ و هر عضو از آن، انتهاهای مشابه با S دارند.

یک مسیر در گراف S، یک دنباله در گراف S است که هیچ گرهی در آن بیش از یک بار استفاده نشود.

N (P) = M (P) +1

یک مسیر با n گره را با P_n نمایش می دهند، یک مسیر بسته را سیکل گویند، به طوری که گره ابتدا و انتهای آن یکی باشد که N(C) = M(C) و همچنین یک سیکل با n گره را با C_n نمایش می دهند .

گراف S را در نظر می‌گیریم اگر گراف S، n گره داشته باشد، ماتریس همسایگی یک ماتریس $n \times n$ است که اگر n_i یا n_j همسایه باشند، درایه‌ی سطر i و ستون j آن برابر ۱ است. و در غیر این صورت برابر صفر می‌شود این ماتریس را با A(S) نمایش می دهیم [۲،۱].

محاسبه دترمینان و مقادیر ویژه برخی ماتریس‌ها در حالت خاص

برخی ماتریس‌ها در حالت خاص دارای خواص جالب و قابل توجهی هستند که برخی کاربردهای آن را در تئوری گراف در این تحقیق استفاده شده است.

فرم اول :

ماتریس M با شرایط زیر را در نظر می‌گیریم اگر ماتریس M دارای N×N بعد باشد داریم :

$$M = \begin{bmatrix} [A]_{n\times n} & [O]_{n\times n} \\ \hline [O]_{n\times n} & [A]_{n\times n} \end{bmatrix}_{N\times N} \qquad N = n\ /\ 2$$

اگر مجموعه مقادیر ویژه ماتریس A,M به ترتیب با $\{\lambda M\}, \{\lambda A\}$ نشان دهیم، اثبات می‌شود که :

$$\{\lambda M\} = \{\lambda A\} \cup \{\lambda A\}$$

فرم اول حالت خاصی از فرم دوم است که با اثبات فرم دوم، فرم اول هم ثابت می‌گردد. همچنین ماتریس A n×n می‌باشد، $n = \frac{N}{2}$ مقدار ویژه دارد و ماتریس M هم دارای N مقدار ویژه است .

فرم دوم :

اگر ماتریسی دارای شرایط مقابل باشد :

$$M = \begin{bmatrix} [A]_{n\times n} & [B]_{n\times n} \\ \hline [B]_{n\times n} & [A]_{n\times n} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

آن گاه مقادیر ویژه و دترمینان آن به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$[C] = [A] + [B]$$
$$[D] = [A] - [B]$$
$$[\lambda M] = [\lambda C] \cup [\lambda D]$$

$$\det = [M] = \det[C]\det[D]$$

دقت شود که به ماتریسهای C,D زیرماتریسهای ماتریس اصلی گفته می شود.

فرم سوم:

اگر ماتریس مورد مطالعه به فرم کلی زیر باشد می‌توان افراز آن را به این شکل در نظر گرفت.

در واقع به یک ماتریس فرم دو اگر یک یا چند سطر و ستون به شکل زیر اضافه شود باز هم به زیر ماتریس‌هائی خواهیم رسید، اگر M تعداد سطر و ستون اضافه شده و N تعداد ابعاد کلی ماتریس باشد، فرض می‌کنیم :

$$[M] = \begin{bmatrix} & & & P_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1m} \\ A & B & & P_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{2m} \\ & & & .. & & & & \\ & & & P_{x1} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{xm} \\ & & & P_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{1m} \\ B & A & & .. & & & & \\ & & & P_{x1} & \cdots & \cdots & \cdots & P_{xm} \\ r_{11} & \cdots & \cdots & r_{1y} & q_{11} & \cdots & \cdots & q_{1m} \\ r_{21} & \cdots & \cdots & r_{2y} & .. & & & \\ r_{m1} & \cdots & \cdots & r_{my} & q_{m1} & \cdots & \cdots & q_{mm} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} x &= \frac{N-m}{2} \\ y &= 2x \end{aligned}$$

زیرماتریسهای این ماتریس عبارتند از:

$$D=A-B \quad \text{و} \quad E=\begin{bmatrix} & A+B & & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1m} \\ & & & \cdots & .. & \cdots & .. \\ & & & P_{x1} & P_{x2} & \cdots & P_{xm} \\ r_{11}+r_{1(x+1)} & \cdots & r_{1x}+r_{1y} & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1}+r_{m(x+1)} & \cdots & r_{mx}+r_{my} & q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{bmatrix}$$

$$\{\lambda m\}=\{\lambda D\}\cup\{\lambda E\},\ \det M=\det D\times\det E$$

پس بجای محاسبه مستقیم در این حالتها می توان از زیرماتریسهای این ماتریسها در محاسبات استفاده کرد[۲].

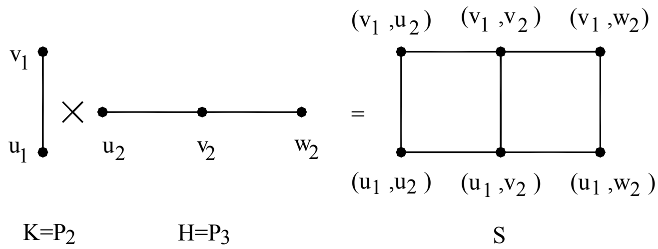
ضرب کارتزین گرافها

با توجه به اینکه مدل بسیاری از سازه ها دارای ساختار منظمی هستند ، می توان آنها را به صورت حاصلضرب تعدادی گراف ساده در نظر گرفت. این زیر گرافها که در تشکیل سازه اصلی مورد استفاده قرار می گیرند ، مولد نام دارند .

ساده ترین نوع ضرب گرافها ضرب کارتزین می باشد . اگر گرافهای K,H به عنوان مولدهای گراف G، به ترتیب دارای N(H) وN(K) گره وE(H) و E(K) یال باشند ؛ آنگاه ضرب کارتزین آنها به صورت $G=H\times K$ تعریف می شود . این ضرب ، جمع کرونکر نیز نام دارد و خاصیت جابجایی را نیز دارد . گراف حاصل یعنی G ، دارای $N(H)\times N(K)$ گره می باشد، دو گره تمایز $u:(u_1,v_1)$ و $v:(u_2,v_2)$ با هم مجاورند هر گاه :

$u_1=u_2 \Rightarrow v_1v_2\in E(H)$ or $v_1=v_2\Rightarrow u_1u_2\in E(K)$

در این تعریف u_i یک گره از گراف H و v_j یک گره از گراف K می باشد . به عنوان مثال ضرب کارتزین $K=P_2$ و $H=P_3$ در شکل ۱ نـشان داده شده است[۳].



شکل ۱- ضرب کارتزین $P_2\times P_3$

ضرب کرونکر

ضرب کرونکر ماتریس مجاورت دو گراف – یا هر دو گراف دلخواه – B وA به صورت $C=A\otimes B$ تعریف می شود .C ماتریسی است که با جایگزینی ماتریس B در محل تک تک درایه های ماتریس A وضرب درایه های آن در درایه های ماتریس B حاصل می شود . بعنوان مثال اگـر $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ باشد ، آنگاه ضرب کرونکر آنها بصورت زیر است :

$$C=A\otimes B=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&a&b\\c&d&c&d\\a&b&0&0\\c&d&0&0\end{bmatrix}$$

ضرب کرونکر دارای خاصیتی است که از آن در تعیین مقادیر ویژه ضربهای کارتزین ، کارتزین قوی و مستقیم استفاده می شود این خاصیت بصورت زیر معرفی می گردد .

$$(B\otimes C)(D\otimes E)=BD\otimes CE$$

اگر v وu بردارهای با ابعاد مناسب باشند ، داریم :

$$(B\otimes C)(u\otimes v)=Bu\otimes Cv$$

اگر v و u بردارهای ویژه B و C با مقادیر ویژه μ, λ با شند در این صورت :

$$Bu \otimes Cv = \mu\lambda u \otimes v$$

بنابراین نتیجه می گیریم $u \otimes v$ بردار ویژه $B \otimes C$ بوده و $\mu\lambda$ هم مقدار ویژه نظیر آن است [۳] .

محاسبه بار بحرانی

در این تحقیق سازه های فضاکار منظم مورد بررسی قرار می گیرند . سازه زمانی منظم است که بتوان آنرا بصورت حاصلضرب دو یا سه گراف بیان نمود، بعبارتی قالب ماتریس سختی کل سازه بصورتی باشد که بتوان از ضرب کارتزین به آن رسید ، بر اساس تعریف ، ناپایداری در سازه زمانی به وقوع می پیوندد که تغییر شکل δ ($P = K_t\delta$) به مقدار نا محدودی افزایش یابد، شرط برقراری این مورد اینست که دترمینان K_t برابر با صفر قرار گیرد .

در یک سازه که ستونهای آن تحت بار محوری P قرار دارند ماتریس سختی برابر K_t با عبارت زیر است :

$$K_t = K_{stiffness} - PK_{geometric}$$

برای ناپایدار شدن سازه :

$$|K_t| = |K_{stiffness} - PK_{geometric}| = 0$$

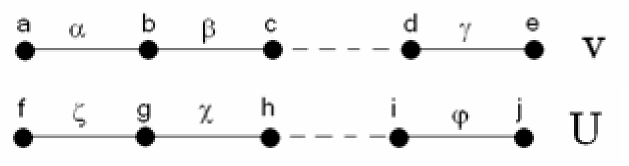
بار متناسب با کمترین مقدار ویژه این معادله مشخصه بار بحرانی نام دارد.

مراحل محاسبه بار بحرانی

در این روش ابتدا بایستی ماتریس سختی کل یعنی K_t را بدست آورد ، سپس یک گراف متناسب با هندسه سازه در نظر می گیریم . بعد به ترتیبی که توضیح داده خواهد شد مولدهای وزندار ، با وزن مجهول در نظر می گیریم ، لازم به ذکر است که گراف وزن دار گرافی است که یالها و رئوس آن دارای وزن می باشد، ماتریس حاصل از گراف حاصلضرب فرضی با وزنهای مجهول را بدست می آوریم سپس از تساوی این ماتریس با ماتریس K_t(ماتریس سختی سازه اصلی) وزنهای مجول محاسبه می شوند، در انتها از خواص این مولدها استفاده کرده و بار بحرانی را محاسبه می کنیم .

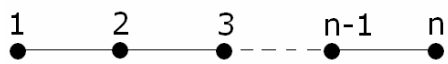
نحوه بدست آوردن مولدهای وزن دار

باتوجه به اینکه می خواهیم از سازه مدل شده به صورت گراف حاصلضرب کارتزین به مولدهای این ضرب برسیم واز روی خواص این مولدها بتوانیم بار بحرانی سازه را تشخیص بدهیم لذا مولدها را به صورت گرافهای وزندار بدست می آوریم که برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم :
ابتدا برای گرافهای مولد وزنهایی مجهول برای هر راس و یال در نظر می گیریم .اگر برای دو گراف فرضی V,U این کار را انجام بدهیم به شکلی مانند شکل ۲ خواهیم رسید :



شکل ۲- گرافهای مولد با وزنهای مجهول

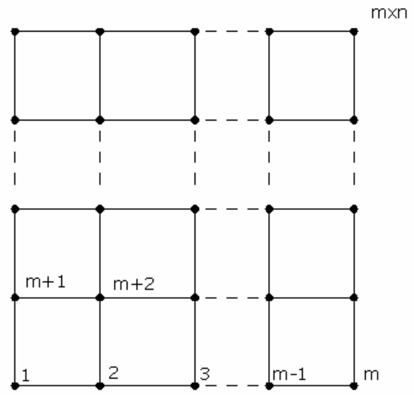
در این مورد ماتریس اتصال را برای هر کدام از مولدها به دست می آوریم که برابر است با وزن برای آن راس و برای یالهای مرتبط برابر با وزن یال مربوطه می باشد .
نکته دیگری که لازم به ذکر است، اینست که این ماتریس را برای گره های با شماره های مورد نظر که بترتیبی که در شکل ۳ آمده است در نظر می گیریم:



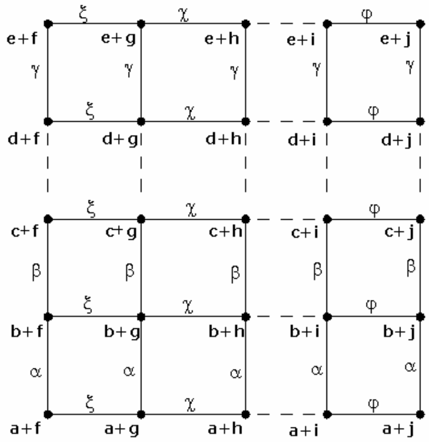
شکل ۳- شماره گذاری گره ها

حال که توانسته ایم ماتریس اتصال مولدها را بدست بیا وریم می توانیم با تعریفی که از ضرب کارتزین داریم ماتریس اتصال گراف حاصلضرب را بدست بیاوریم اگر برای مثال بالا بخواهیم گراف وزن دار حاصلضرب را بدست بیاوریم به شکل ۴ خواهیم رسید .

بایستی تو جه داشت که در محل رئوس وزن راسهای مولدها به هم اضافه شده است . اکنون از روی شکل ۴ مـی تـوانیم مـاتریس اتـصال را بـه همـان ترتیبی که در مورد مولدها عمل کردیم، بدست بیاوریم و نکته ایکه بایستی مد نظر داشت اینست که در مورد ترتیب گـره هـا لازم اسـت بـصورتیکه در شکل ۵ آمده است عمل کنیم :



شکل ۵- شماره گذاری گره ها برای گراف حاصلضرب



شکل ۴- گراف حاصلضرب با وزنهای مجهول

محاسبه بار بحرانی قابهای منظم متقارن

زمانی که سازه در یک یا دو راستا دارای تقارن باشد، مولدهایی که به این صورت حاصل می شوند دارای ماتریسهایی هستند که این ماتریسهاخود دارای فرمهای تقارن بیان شده در قسمتهای قبل بود. از اینرو ماتریسهای اتصال مولدها دارای زیر ماتریسهایی خواهند بود که از این زیر ماتریسها برای محاسبه بار بحرانی استفاده می شود . از آنجایی که در این موارد وزن بالها این نیاز را بر آورده می کند اما مجهولات گرهی را نیز بایستی در ایـن راسـتا بدسـت آوریم .نکته ایکه حایز اهمیت است اینست که چون تعداد مجولات گرهی (وزن رئوس) از تعداد معادلات گرهی کمتر است بنا بـر ایـن بینهایـت جـواب برای وزنهای مجهول گرهی می توان بدست آورد ؛ اما از آنجاییکه قصد داریم ماتریس اتصال مولدها به فرم ۲و۳ در آید باز میتوانیم مجهولات را کاهش بدهیم برای مثال اگر حالت نشان داده شده در شکل ۶ در نظر بگیریم :

شکل ۶- مولدهای گراف متقارن

برای رسیدن به فرمهای تقارن ۲و۳ بایستی شرط زیر برقرار باشد :

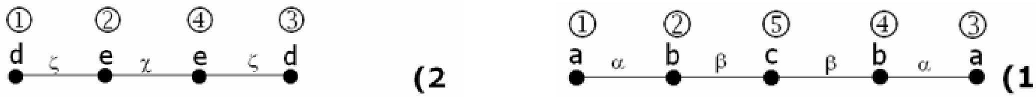
$$a = d \ ,b = c, e = g$$

که این شرط براحتی بر آورده می شود ،بنابراین فرم اصلاح شده شکل۶ در شکل ۷ نشان داده شده است .

شکل ۷- گرافهای اصلاح شده

لازم است از همان شماره گذاری قبلی که توضیح داده شد ماتریس مجهول حاصلضرب را بدست می آوریم واین ماتریس را برابر ماتریس سختی کل قرار می دهیم،بایستی توجه داشت چون بینهایت جواب وجود دارد هر فرضی که برای مجهولات بـشرط ارضـای معـادلات را در نظـر بگیـریم صـحیح بـوده وتفاوتی در جواب ندارد .

حال که با فرض شماره گذاری قبلی وزنهای مجهول محاسبه شدند (ترتیب شماره گذاری در مقدار دترمینان اثری ندارد فقـط ظـاهر مـاتریس را عـوض می کند) برای آنکه برای ماتریس اتصال مولدها به فرمهای۲و۳ برسیم بایستی شماره گذاری گره ها بترتیبی باشد کـه تفـاوت شـماره درجـه آزادیهـای متقارن برابر نصف درجات آزادی کل مولد باشد ،برای مثال به ترتیبی که در شکل ۸ آمده است عمل می کنیم:



شکل۸-نحوه شماره گذاری گره ها

پس می بینیم که برای این مورد می توان زیر ماتریسهای C,D از فرم ۲ را بدست آورد .

حال که زیر ماتریسها بدست آمدند می توان ثابت کرد بین دترمینان ماتریس سختی کل ودترمینان این زیرماتریسها رابطه زیر برقرار است [۸] ، برای ماتریس کل برابر P وزیرماتریسهای A_{n1xm1}, B_{n2xn2} ازماتریس اول(V) وزیرماتریسهای C_{m1xm1}, D_{m2xm2} از ماتریس دوم (U) داریم :

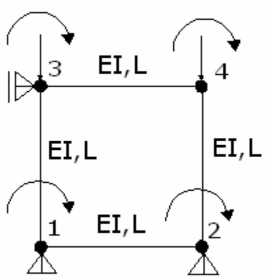
$$P = V \otimes I(U) + I(V) \otimes U$$

$$|P| = |\ A \otimes I_{m1} + I_{n1} \otimes C\ | \times |\ A \otimes I_{m2} + I_{n1} \otimes D\ | \times |\ B \otimes I_{m1} + I_{n2} \otimes C\ | \times |\ B \otimes I_{m2} + I_{n2} \otimes D\ |$$

دقت شود که I(V) , I(U) بترتیب ماتریسهای همانی هم بعد با ماتریسهای اتصال V , U هستند.

مثال: مطلوبست محاسبه باربحرانی قاب شکل ۹ ، جهت مقایسه جواب بانرم افزار Sap2000 از مقطع IPE100 دارای مشخصات به مشخصات مقابل استفاده شده است :

E=2.039*10^10 kgf/m^2 , I=1.71*10^-6 m^4 ، L=4m



شکل ۹- مثال

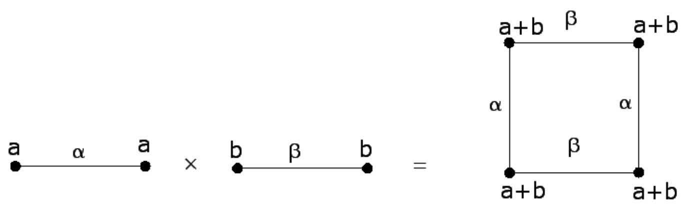
در اینصورت ماتریس سختی کل برای شماره گذاری گرهی که در شکل۹ نشان داده شده برابر است با:

فرض می کنیم که : $\lambda = \dfrac{L^2}{30EI} \Leftarrow$

$$K_g = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad K_s = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$K_t = K_s - \lambda K_g = \begin{bmatrix} 8-4\lambda & 2 & 2+\lambda & 0 \\ 2 & 8-4\lambda & 0 & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 0 & 8-4\lambda & 2 \\ 0 & 2+\lambda & 2 & 8-4\lambda \end{bmatrix}$$

گام بعدی در نظر گرفتن مسیرهایی با وزنهای مجهول است که در شکل ۱۰ ضرب آنها نشان داده شده است :



شکل ۱۰- گراف مجهول مثال

ماتریس اتصال گراف حاصلضرب وزن دار بصورت زیر بدست می آید :

$$K_p = \begin{bmatrix} a+b & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & a+b & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & a+b & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & a+b \end{bmatrix}$$

حال اگر این دو ماتریس را برابر هم قرار مجهولات بصورت زیر بدست می آیند :

$$a = b = 4 - 2\lambda \,, \alpha = 2 + \lambda \,, \beta = 2$$

بنابراین مولدهای وزندار در شکل ۱۱نشان داده شده اند :

شکل ۱۱- مولدهای وزندار

در نتیجه ماتریسهای اتصال مولدها به صورت زیر بدست می آیند :

$$V = \begin{bmatrix} 4-2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 4-2\lambda \end{bmatrix} \;, U = \begin{bmatrix} 4-2\lambda & 2 \\ 2 & 4-2\lambda \end{bmatrix}$$

زیر ماتریسهای این ماتریسها عبارتند :

$$C_v = 6 - \lambda \quad \therefore \; D_v = 2 - 3\lambda$$
$$C_u = 6 - 2\lambda \quad \therefore \; D_u = 2 - 2\lambda$$

اگرترکیب این زیرماتریسها را که همان ضرب کارتزین زیرماتریسها است بدست بیاوریم :

$$q_1 = C_v \oplus C_u = 12 - 3\lambda \quad q_2 = C_v \oplus D_u = 8 - 3\lambda \quad q_3 = D_v \oplus C_u = 8 - 5\lambda \quad q_4 = D_v \oplus D_u = 4 - 5\lambda$$

که $\oplus$ ، یک علامت برای نشان دادن ضرب کارتزین است، اگر دترمینان این ماتریسها رابدست آوریم و برابر صفرقرار دهیم :

$$\lambda = 0.8 \,, 1.6 \,, 2.67 \,, 4$$

پس بار بحرانی برابر است با :

$$\lambda_{\min} = \frac{L^2 P_{cr}}{30EI} \rightarrow P_{cr} = \frac{24EI}{L^2} = 24 \times 2179.18 = 52300.32 \; kgf$$

از Sap2000:

Sap2000 : Pcr= 52297.8341 kgf = 23.99 EI/L^2

بنابراین پاسخ هردو روش بسیار به هم نزدیک است .

نتایج

با توجه به پیشرفت روز افزون علم و قویتر شدن کامپیوترها و در نتیجه افزایش قدرت محاسبات این دستگاهها دقت انجام محاسبات بالاتر و نیز زمان انجام محاسبات نیز کوتاهتر شده است، اما زمانیکه ابعاد سازه بعنوان مثال در سازه های فضاکار گسترده تر می شود باز دقت انجام محاسبات کمترو نیز زمان انجام این محاسبات بیشتر می شود، از اینرو در این مقاله سعی میشود تا با بکارگیری شیوه های جدید از جمله استفاده از ضرب گرافهـا و تجزیـه ماتریسها این مشکلات را تا اندازه ای کمترکند.

منابع

[1] A. Kaveh, Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods, 2nd Edition, RSP (John Wiley), Taunton, Somerset UK, 1995.
[2] A. Kaveh, Optimal Structural Analysis, RSP (John Wiley), 2nd Edition, UK, 2006.
[3] A. Kaveh. H. Rahami. A new spectral method for nodal ordering of regular space structures, Finite Elements in Analysis and Design, to appear, 2004.
[4] A. Kaveh, MA. Sayarinejad. Eigensoluation for matrices of special patterns. Commun Numer Meth Eng 2003;19:125-36.

[5] A. Kaveh, B. Salimbahrami. Eigensolutions of symmetric frames using graph factorization, Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004;20:889-910.

[6] A. Kaveh, B. Salimbahrami. Buckling load of frames using graph symmetry. In: Proceedings of the 4th on engineering computational technology, Lisbon; 2004.

[7] M. Fiedler, Algebraic connectivity of graphs, Czech. Math. J. 23 (1973) 298-305.

[۸] مرسلی؛ وفا. " کاربردهای ضرب گراف‌ها در مسائل مربوط به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مکانیک سازه‌ها " ، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشگاه علوم و فنون مازندران، ۱۳۸۷