

مروری بر توابع شکل MLS و روش بدون شبکه EFG

محمد رضا قاسمی¹، امیر بهشاد²

1- عضو هیئت علمی گروه مهندسی عمران دانشگاه سیستان و بلوچستان

2- کارشناس ارشد سازه (دانشگاه سیستان و بلوچستان)

ambeshad@yahoo.com

چکیده

ابتدا توابع شکل حداقل مربعات متحرک¹، و نحوه محاسبه آنها شرح داده می شود، سپس نحوه بکار گیری این توابع در روش گالرکین بدون المان² بیان می شود. روش EFG و شیوه استفاده از آن در حل معادلات دیفرانسیل مربوط به مسائل مهندسی توضیح داده شده است. در پایان تحلیل تیر طره جهت بررسی بیشتر این روش آورده شده است.

کلمات کلیدی: روش حداقل مربعات متحرک، روش بدون شبکه EFG، ماتریس سختی، شرایط مرزی.

1. مقدمه

تولید توابع شکل از مهمترین موضوعات در روشهای بدون شبکه به حساب می آید و تحقیقات در رابطه با تولید توابع شکل تنها با استفاده از یک سری نقاط پراکنده اختیاری در حوزه مسئله و بدون استفاده از هر گونه شبکه بندی از پیش تعیین شده از مهمترین مباحث در زمینه روشهای بدون شبکه می باشد. به طور کلی یک روش مناسب برای تولید توابع شکل می بایست شرایط زیر را دارا باشد [2].

1- زیر حوزه تقریب تابع باید نسبت به کل حوزه مسئله کوچک باشند.

2- فرایند از نظر محاسباتی کارآمد بوده و پیچیدگی زیادی نداشته باشد.

3- بهتر است توابع شکل شرط دلتای کرونکر را ارضاء کنند.

به طور کلی روشهای محاسبه توابع شکل را می توان به سه گروه زیر تقسیم بندی کرد.

الف- روشهایی که بر مبنای استفاده از سری های محدود اند.

ب- روشهایی که از انتگرال گیری محدود استفاده می کنند.

1- Moving Least Square

2- Element Free Galerkin

ج- روشهایی که از فرمولبندی تفاضلهای محدود استفاده می کنند.

روشهای بدون شبکه طی چند سال اخیر به مجموعه روشهای عددی اضافه شده و بستر مناسب و وسیعی در زمینه های علمی ، تحقیقاتی و مهندسی گردیده است. یکی از مهمترین و پرکاربردترین روشهای بدون شبکه روش گالرکین بدون المان می باشد. در این روش از روش حداقل مربعات متحرک به عنوان تابع شکل استفاده می شود.

2. روش حداقل مربعات متحرک

در این تحقیق از روش حداقل مربعات متحرک که از گروه الف می باشد، برای تولید توابع شکل استفاده شده است. در روش حداقل مربعات متحرک ، تابع تخمین زننده $\hat{u}(x)$ توسط حاصلضرب داخلی یک بردار چند جمله ای $P(x)$ در یک بردار ضرایب $\alpha(x)$ حاصل می شود. این روش اولین بار در سال 1960 توسط Shepard [11]، به عنوان وسیله ای برای برازش یک منحنی هموار از بین تعدادی داده، ارائه شده است.

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) \cdot \alpha_j(x) \equiv P(x) \cdot \alpha(x) \quad (1)$$

به منظور تعیین ضرایب مجهول $\alpha(x)$ ابتدا تابع وزن دار $J(x)$ به صورت زیر تعریف شده است، [3]:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n W_i(x) \cdot [P^T(x_i) \cdot \alpha(x) - \tilde{u}_i]^2 \quad (2)$$

در رابطه بالا $W_i(x)$ نشان دهنده تابع وزن مربوط به نقطه گرهی i و مقدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه i و مقدار داده شده در همان نقطه می باشند. همچنین n تعداد نقاط در حوزه اثر تابع W می باشد. تابع وزن $W_i(x)$ مقادیر غیر صفری در حوزه تاثیر خود خواهد داشت :

$$W(x - x_j) = W(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \text{for } \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{2} \leq \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3)$$

در رابطه (3) ، $\bar{d} = \|x - x_j\| / d_{\max}$ و d_{\max} شعاع تاثیر نقطه گرهی x_j می باشد. برای هر نقطه d_{\max} باید به گونه ای انتخاب شود که تعداد وزنه های غیر صفر، بزرگتر از تعداد تک جملات موجود در چند جمله ای باشند. در رابطه (3) توابع وزنی اسپیلیان مرتبه سوم آورده شده است. رابطه (2) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$J = (P \cdot \alpha - \tilde{u})^T \cdot w \cdot (P \cdot \alpha - \tilde{u}) \quad (4)$$

$$\tilde{u}^T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n) \quad (5)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

برای پیدا کردن ضرایب نقاط کفایت اکسترمم تابع J محاسبه شود.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial a} = A(x).a(x) - B(x).\tilde{u} = 0 \quad (7)$$

$$H = P^T.W.P \quad (8)$$

$$g = P^T.W \quad (9)$$

بنابراین می توان ضرایب $\alpha(x)$ را طبق رابطه زیر یافت:

$$\alpha(x) = H^{-1}(x).g(x).\tilde{u} \quad (10)$$

حال تابع تخمین زننده $\hat{u}(x)$ را می توان طبق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x).\tilde{u}_i \quad (11)$$

$$\Phi = P^T(x).H^{-1}(x).g(x) \quad (12)$$

$$\Phi = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \dots \phi_n(x)] \quad (13)$$

که در آن ϕ_i ها توابع شکل MLS می باشند. همچنین مشتقات توابع شکل به راحتی بدست می آیند.

3. روش بدون المان گالرکین

در این روش بمنظور استخراج مقادیر توابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک و برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل و تشکیل معادلات جبری از روش گالرکین استاندارد همانند روال معمول در اجزاء محدود استفاده می شود. در این قسمت فرمولبندی روش EFG برای مسائل خطی و دو بعدی مکانیک جامدات آورده شده است.

معادله تعادل در حوزه مسئله Ω به صورت زیر بیان می شود [1].

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (14)$$

شرط مرزی مشتقی روی مرز Γ_f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma n = \bar{t} \quad (15)$$

شرط مرزی طبیعی روی مرز Γ_u به صورت زیر تعریف شده است:

$$u = \bar{u} \quad (16)$$

که در آن L عملگر دیفرانسیلی می باشد. b نیز نیروهای خارجی یا منابعی اند که بر حوزه مسئله عمل می کنند. σ تانسور تنش بوده که رابطه آن در (17) آورده شده است.

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \quad \sigma_{xy}]^T \quad (17)$$

در ابتدا حوزه مسئله و مرزهای آن توسط n نقطه گرهی گسسته سازی شده است. مقدار تابع تقریب زنده \hat{u} در یک نقطه فرضی مانند x را می توان توسط رابطه زیر تعیین کرد:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (18)$$

که در آن n تعداد نقاط گرهی که مقادیرشان در مقدار تابع در نقطه x موثر اند و ϕ_i تابع شکل گره i ام می باشند. فرم گسسته معادله دیفرانسیل فوق با استفاده از فرم ضعیف شده گالرکین در رابطه (19) آورده شده است.

$$\int_{\Omega} \delta(Lu)^T C(Lu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (u - \bar{u}) \alpha (u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (19)$$

کلیه روشهای بدون شبکه که از حداقل مربعات برای استخراج تابع شکل استفاده می کنند، صرفاً مقادیر تابع شکل را در نقاط مربوطه ارائه مینمایند و بر خلاف روش اجزاء محدود تابع شکل بطور صریح وجود ندارد. همانطور که در بخش مربوط به توابع شکل بیان شد، توابع شکل حاصل از MLS شرط دلتای کرونیگر را ارضاء نمی کنند. بنابراین برای اعمال شرایط مرزی نمی توان همانند روش معمول در FEM عمل کرد. برای این منظور در روش EFG از روشهای مختلفی مانند روش پنالتی یا ضرایب لاگرانژ جهت اعمال شرایط مرزی استفاده می شود [5]. استفاده از ضرایب لاگرانژ باعث از دست دادن نواری و مثبت معین بودن ماتریسها شده و این امر هزینه محاسبات را بالا خواهد برد. به همین دلیل در اکثر مسائل برای اعمال شرایط مرزی از روش پنالتی استفاده می شود. در رابطه (19) به منظور اعمال شرایط مرزی از روش پنالتی استفاده شده است. با جایگذاری رابطه (18) در (19) و یک سری عملیات جبری می توان ماتریس سختی و بردار سمت راست را یافت. در روابط (20) تا (27) فرمولهای ماتریس سختی و بردار سمت راست آورده شده است همانطور که مشاهده می شود این فرمولها شباهت زیادی به فرمولبندی ماتریس سختی و بردار سمت راست در روش متداول FEM دارند. تنها تفاوت آنها در اینجاست که در روش FEM ماتریسهای جزء برای هر المان بوده در صورتی که در روش EFG ماتریسهای جزء برای گره ها محاسبه می شوند. همانطور که از رابطه (20) پیداست، تابع درون انتگرال بر حسب مختصات می باشد و برای انتگرال گیری عددی باید مقادیر این تابع را در نقاط گوس بدست آورد. به این منظور باید کل حوزه مسئله را مش بندی کرده و برای هر مش نقاط گوس داخل آن را یافت. در محاسبه ماتریس سختی، اگر زیر حوزه های دو نقطه i, j با هم همپوشانی داشته و در آن ناحیه حداقل یک نقطه گوسی وجود داشته باشد، آنگاه K_{ij} موجود خواهد بود. بنابر این بسیاری از مولفه های ماتریس سختی کل بدلیل کوچک بودن شعاع تاثیر نقاط گرهی صفر خواهد بود و اگر شعاع تاثیر نقاط کوچک بوده و نقاط به طور مناسبی شماره گذاری شده باشند این ماتریس نواری خواهد بود. با استفاده از رابطه (23) می توان دریافت ماتریس سختی کل متقارن می باشد.

$$k_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T C B_j d\Omega \quad (20)$$

$$B_i = L \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$f_i = \int_{\Omega} \phi_i^T b d\Omega + \int_{\Gamma_i} \phi_i^T \bar{t} d\Gamma \quad (22)$$

$$[k_{ij}]^T = \int_{\Omega} [B_i^T C B_j]^T d\Omega = \int_{\Omega} [B_j^T C^T B_i] d\Omega = \int_{\Omega} [B_j^T C B_i] d\Omega = K_{ji} \quad (23)$$

$$(K + K^\alpha) = F + F^\alpha \quad (24)$$

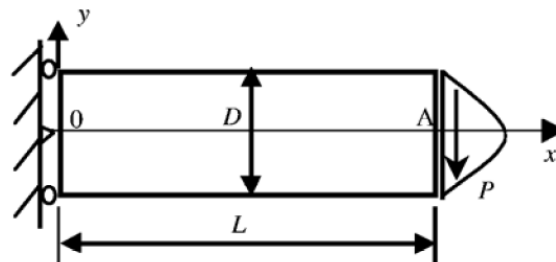
$$k_{ij}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \phi_i^T \alpha \phi_j d\Gamma \quad (25)$$

$$F_i^\alpha = \int_{\Gamma_u} \phi_i^T \alpha \bar{u} d\Gamma \quad (26)$$

دقت جوابهای EFG به تعداد نقاط گرهی، تراکم مش بندی زمینه ای و مرتبه انتگرال گیری گوسی بستگی دارد. در بخش بعد به منظور نشان دادن قابلیت روش در حل مسائل مهندسی و بررسی بیشتر روش EFG مسئله تحلیل تیر طره با این روش حل شده است.

4. مسئله نمونه: تحلیل تیر طره

هدف از حل این مسئله بررسی فرایند انتگرال گیری عددی و مش بندی زمینه ای مورد استفاده در روش EFG می باشد. این مسئله از کتاب Liu [2]، آورده شده است. در این مسئله یک تیر طره که در انتهای آزاد آن بار P اعمال شده تحلیل می شود. هندسه این مسئله در شکل (1) آورده شده است.



شکل 1. تیر طره مسئله نمونه

جوابهای دقیق مسئله به صورت زیر می باشد.

$$u_x = \frac{-P}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu)(y^2 - \frac{D^2}{4}) \right] \quad \text{جابجایی در راستای } x: \quad (27)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2 (L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad \text{جابجایی در راستای } y: \quad (28)$$

$$\sigma_x = -\frac{P(L - x)}{I} \quad \text{تنش نرمال در مقطع تیر:} \quad (29)$$

$$\sigma_y = 0 \quad \text{تنش نرمال در مقطع افقی تیر:} \quad (30)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (31) \quad \text{تنش برشی در مقطع تیر:}$$

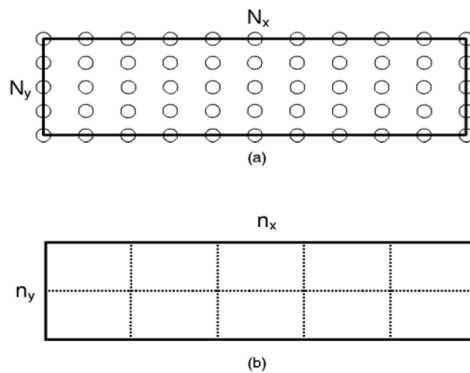
در حل این مسئله پارامترهای این تیر طره به صورت زیر در نظر گرفته شده است. ارتفاع تیر 12 سانتی متر و طول آن 480 سانتی متر در نظر گرفته شده است.

$$\nu = 0.3 \quad E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2, \quad P = 1000 \text{ N}, \quad (32)$$

در این مسئله خطای انرژی کرنشی (e) به عنوان معیاری برای بررسی دقت جوابهای حل عددی مورد استفاده قرار گرفته است.

$$e_e = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}^{num} - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact}) D (\boldsymbol{\varepsilon}^{num} - \boldsymbol{\varepsilon}^{exact}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (33)$$

در شکل (2) نحوه گره گذاری و مش بندی زمینه ای آورده شده است.



شکل 2. گره گذاری (a) و مش بندی زمینه ای (b) برای تیر

در جدول (1) خلاصه ای از خطاهای محاسبه با استفاده از معیار معرفی شده در رابطه (33) برای نشان دادن اثر مرتبه انتگرال گیری گوسی و تراکم مش بندی زمینهای، آورده شده است. در جدول (1) تعداد کل نقاط گوسی و N_Q تعداد کل معادلات مستقل مورد استفاده در تمامی نقاط گوسی می باشد که مقدار آن سه برابر تعداد کل نقاط گوسی است. تعداد در جات آزادی N_u در این مسئله 100 می باشد. با توجه به جدول (1) می توان در یافت تنها وقتی که تقریباً $N_Q > 4N_u$ یا تعداد کل نقاط گوسی بیشتر از 3 برابر نقاط گرهی باشد، روش EFG دارای جوابهای قابل قبول می باشد.

5. نتیجه گیری

همان گونه که در این مقاله بحث شد می توان از روش بدون شبکه EFG برای تحلیل مسائل مهندسی استفاده کرد. برای تولید توابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک استفاده شده است. به این دلیل که توابع شکل MLS شرط دلتای کرونگر را ارضا نمی کنند، از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی استفاده شده است. در پایان یک تیر طره با استفاده از روش بدون شبکه EFG مورد تحلیل واقع شد. نتایج حاصله نشان می دهد که این روش از دقت بالایی برخوردار است.

جدول (1) بررسی اثر تعداد نقاط گوسی در دقت جوابهای مسئله تیر طره

Gauss Points (n_g)	Background Mesh ($n_x \times n_y$)				
	1 × 1	2 × 1	4 × 1	8 × 2	12 × 3
2 × 2	$e = \infty$ $N_Q = 12$	$e = \infty$ $N_Q = 24$	$e = \infty$ $N_Q = 48$	$e = 8.10$ $N_Q = 192$	$e = 3.12$ $N_Q = 432$
3 × 3	$e = \infty$ $N_Q = 27$	$e = \infty$ $N_Q = 54$	$e = \infty$ $N_Q = 108$	$e = 4.01$ $N_Q = 432$	$e = 2.95$ $N_Q = 972$
4 × 4	$e = \infty$ $N_Q = 48$	$e = \infty$ $N_Q = 96$	$e = 4.37$ $N_Q = 192$	$e = 3.62$ $N_Q = 768$	$e = 2.90$ $N_Q = 1728$
5 × 5	$e = \infty$ $N_Q = 75$	$e = 58.2$ $N_Q = 150$	$e = 4.63$ $N_Q = 300$	$e = 2.90$ $N_Q = 1200$	$e = 2.89$ $N_Q = 2700$
6 × 6	$e = \infty$ $N_Q = 108$	$e = 4.74$ $N_Q = 216$	$e = 3.74$ $N_Q = 432$	$e = 2.89$ $N_Q = 1728$	$e = 2.89$ $N_Q = 3888$
7 × 7	$e = \infty$ $N_Q = 147$	$e = 4.92$ $N_Q = 294$	$e = 2.96$ $N_Q = 588$	$e = 2.89$ $N_Q = 2352$	$e = 2.89$ $N_Q = 5292$
8 × 8	$e = \infty$ $N_Q = 192$	$e = 3.70$ $N_Q = 384$	$e = 2.99$ $N_Q = 768$	$e = 2.89$ $N_Q = 3072$	$e = 2.89$ $N_Q = 6912$
9 × 9	$e = \infty$ $N_Q = 243$	$e = 6.55$ $N_Q = 486$	$e = 2.93$ $N_Q = 972$	$e = 2.89$ $N_Q = 3888$	$e = 2.89$ $N_Q = 8748$
10 × 10	$e = 41.5$ $N_Q = 300$	$e = 9.52$ $N_Q = 600$	$e = 2.90$ $N_Q = 1200$	$e = 2.89$ $N_Q = 4800$	$e = 2.89$ $N_Q = 10800$

Notes: $N_Q = 3 \times n_Q = 3 \times (n_x \times n_y)$.

مراجع

- [1] Belytschko T, Lu YY, Gu L "Element-free Galerkin methods." Int. J. Numer. Meth. Eng. 37:229–256 (1994)
- [2] Liu GR, " Mesh free methods: moving beyond the finite element method." CRC press, USA (2002)
- [3] Liu GR, Gu YT, "An Introduction to MFree Methods and Their Programming." Kluwer Academic Publishers (2003)
- [4] Belytschko, T., Y. Y. Liu, and L. Gu (1994). Element Free Galerkin Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37, 229-256.
- [5] Belytschko, T., Y. Krongauz, M. Fleming, D. Organ and W. K. Liu (1996). Smoothing and Accelerated Computations in the Element-free Galerkin Method. Journal of Computational and Applied Mechanics 74, 111-126.
- [6] Lancaster, P. and K. Salkauskas (1981). Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. Mathematics of Computation 37, 141-158
- [7] Belytschko, T., Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl (1996). Meshless Methods : An overview and Recent Developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, 3-47.
- [8] Melenk J.M., Babuska I. " The partition of unity finite element method: basic theory and applications." Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139: 289–314 (1999)
- [9] Du C. "An element-free Galerkin method for simulation of stationary two-dimensional shallow water flows in rivers " Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol 182: 89-107 (2000)
- [10] Atluri SN, Kim HG, Cho JY "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods." Comput.
- [11] Shepard D. "A two-dimensional function for irregularity spaced data" In ACM National conference , pages 517-24, (1968)