

تحلیل تئوریک و عددی تیرهای جدار نازک تک تقارن

محمد سعید کریمی^۱، محمد بزاز^۲، عباس سیوندی پور^۳

۱- mkarimi@semnan.ac.ir

۲- Mohammad-bazaz1362@yahoo.com

۳- abbas.sivandi@gmail.com

چکیده

اعضای جدار نازک با مقطع باز بخاطر وزن کم و مقاومت بالا بطور مرتب در سازه های فلزی مورد استفاده قرار می گیرند. معمولاً مقاطعی از قبیل I , T , L , C , Z , در کارهای مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. با پیشرفت صنعت پروسه تولید نورد گرم و نورد سرد ، این سازه ها پیشنهاد می شوند و یک راه حل مناسب برای کاهش وزن سازه ها و افزایش مقاومت می باشد. اغلب تیرهای جدار نازک مقاومت خوبی حول محور خمش در جهت محور قوی خود دارند اما مقاومت کمی حول محور ضعیف خود و همچنین مقاومت کمی در پیچش دارند. و دلیل این مسئله این است که وقتی عضو آزاد حول محور اصلی قویتر خود خم می شود ناپایداری از خود نشان می دهد و امکان دارد که ناگهان رفتار خمشی _ پیچشی از خود نشان دهد. تحقیق به تحلیل تئوری و عددی تیرهای جداره نازک با یک محور تقارن و رفتار ناگهانی ذکر شده می پردازد.

کلمات کلیدی: مقاطع جدار نازک، تحلیل عددی، کمانش جانبی ، پیچش، اجزاء محدود

مقدمه

رفتار خمشی _ پیچشی تیرهای جدار نازک پیچیده تر از زمانی است که پیچش و اعوجاج با هم تلفیق می شوند و همچنین وقتی که تحت ترکیب خمش و پیچش قرار می گیرد. مدل Vlasov برای پیچش های غیر یکنواخت کوچک برگرفته شده، ایجاد گردیده است. همیشه آنالیز پایداری برای تعیین بارهای کمانشی بر اساس پایداری خطی بصورت خلاصه شده می باشد و مراجعه به آیین نامه های طراحی برای تحلیل های پیچیده ترجیح داده می شود مانند روابطی که آیین نامه اروپایی Eurocode 3 بر گرفته می شود. روابط گسترده ای در اختصاص به المانهای جدار نازک با مقطع باز برای هر دو مرحله عددی و تحلیلی وجود دارد و مدل های المان محدود زیادی برای تحلیل رفتار و پایداری را می توان یافت. بر اساس آیین نامه اروپایی Eurocode 3 یک راه حل تحلیلی برای مسائل کمانش جانبی مقاطع تیرهای I شکل تک تقارن فرمول بندی شده است. و این رابطه تابعی از شرایط مرزی، توزیع لنگر، پارامتر ارتفاع بار و درجه تک تقارنی مقطع که به ضریب Wagner معروف است، دارد. برخی از حالات بارگذاری انتخاب شده مورد بررسی قرار گرفته اند و اغلب این راه حل ها با بسط مدل تئوری بوسیله Djalaly الهام داده شده است. مطالعه های قابل مقایسه زیادی بین راه حل تئوری و عددی توسط Mohri بررسی شده است.

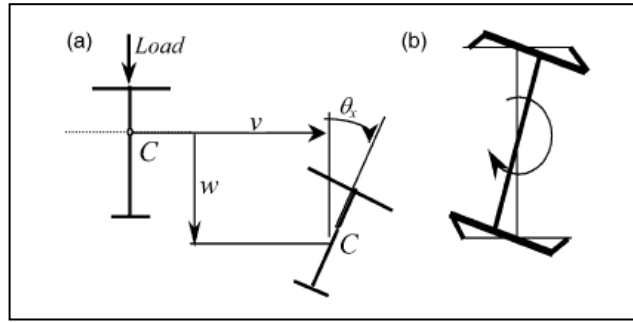
مدل تئوریک برای تحلیل پایداری

در شکل ۲ یک عضو جدار نازک افقی و با مقطع باز به همراه یک محور مختصات کارترین انتخاب شده نشان داده شده است. محور اول با علامت x و محورهای اصلی خمشی دوم و سوم با علامت y, z مشخص شده اند. مبدا این محورها در مرکز G قرار گرفته است. مرکز برشی نیز با علامت C و با مختصات (y_c, z_c) در G_{yz} مشخص شده است. M نقطه ای است بر روی محیط مقطع با مختصات (y, z, w) که w مختصات مقطع نقطه معرفی شده در مدل Vlasov بخاطر لحاظ پیچش غیر یکنواخت مقطع.

۱- استادیار دانشگاه سمنان

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه دانشگاه سمنان

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد زلزله دانشگاه سمنان



شکل ۱- رفتار خمشی-پیچشی در کمانش جانبی (a) و اعوجاج مقطع تحت بار پیچشی

فرضیات اساسی این مدل به قرار زیر است.

۱- محیط مقطع در صفحه خود صلب می باشد. این مسئله به این معنی می باشد که اعوجاجی در مقطع وجود ندارد.

۲- تغییر شکل برشی در سطح مقطع وجود ندارد.

بر اساس دو فرض اولیه سه جزء تغییر مکانی M را می توان بر اساس مرکز برشی آنها بدست آورد و روابط خطی زیر مورد استفاده قرار گرفته اند.

$$u_M = u - yv' - zw'_x - w\theta'_x \quad (۱)$$

$$v_M = v - (z - z_c)\theta_x \quad (۲)$$

$$w_M = w + (y - y_c)\theta_x \quad (۳)$$

که در روابط بالا u, v, w به ترتیب تغییرمکانهای نقطه مرکز برش در جهت های x, y, z می باشند و θ_x زاویه پیچش می باشد. در این روابط $(.)'$ مشتق نسبت به x را نشان می دهد.

در حالت تیرهای جدار نازک اجزای تانسور کرنش که شامل تغییرمکانهای بزرگ می باشد بصورت زیر خلاصه شده است و بوسیله $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}$ نشان داده شده اند.

$$\epsilon_{xx} = u'_M + \frac{1}{2}((u'_M)^2 + (v'_M)^2 + (w'_M)^2) \approx u'_M + \frac{1}{2}((v'_M)^2 + (w'_M)^2) \quad (۴)$$

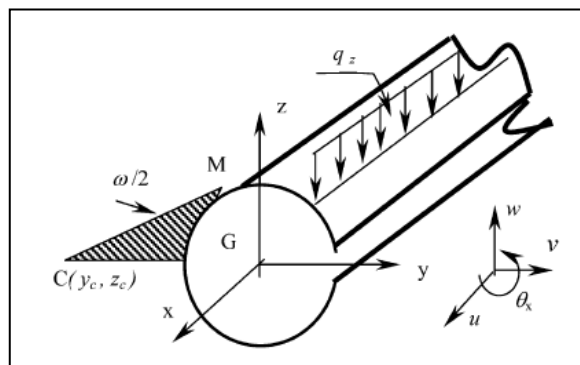
با بسط روابط فوق مطابق اجزای تغییرمکان های (۱-۳) می توان بصورت زیر نوشت.

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_1 + \epsilon_{n1} \quad (۵- الف)$$

که

$$\epsilon_1 = u' - yv'' - w\theta''_x \quad (۵- ب)$$

$$\epsilon_{n1} = \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + R^2\theta_x'^2) + (y - y_c)w'\theta'_x - (z - z_c)v'\theta'_x \quad (۵- ج)$$



شکل ۲- مقطع باز شده یک تیر

سایر اجزای کرنشی بصورت زیر می باشند:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}(z-z_c + \frac{\partial \omega}{\partial y})\theta'_x \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(y-y_c + \frac{\partial \omega}{\partial z})\theta'_x \quad (7)$$

در رابطه ۵ (ج) عبارت R^2 عبارت است از:

$$R^2 = (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 \quad (8)$$

در حالت رفتار الاستیک انرژی کرنشی تیر ناشی از پیچش عبارت است از

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_{xx}^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta'_x)^2 dx \quad (9)$$

ترم آخر در این رابطه بخش انرژی کرنش پیچشی St-Venant می باشد. E و G به ترتیب مدول یانگ و برشی می باشند. J ثابت پیچشی می باشد. انرژی کرنشی U با بسط مطابق با رابطه (۵-الف) به صورت زیر در می آید.

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta'_x)^2 dx \quad (10)$$

در پایداری خطی قسمت ε_{nl}^2 حذف شده است. در این حالت انرژی کرنشی بصورت زیر حاصل می شود.

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_1^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta'_x)^2 dx + \int_L \int_A E \varepsilon_1 \varepsilon_{nl} dA dx = U_I + U_{nl} \quad (11-الف)$$

بصورتی که U_I و U_{nl} قسمتهای طی و دوجه دوم انرژی کرنشی می باشند که بصورت زیر نشان داده شده اند.

$$U_I = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_1^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta'_x)^2 dx \quad (11-ب)$$

$$U_{nl} = \int_L \int_A E \varepsilon_1 \varepsilon_{nl} dA dx \quad (11-ج)$$

با استفاده از رابطه (۵-الف) و وضعیت محورهای اصلی در خمش و پیچش رابطه زیر برای U_I حاصل می شود.

$$U_I = \frac{1}{2} \int_L (EA(u')^2 + EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta''_x)^2) dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta'_x)^2 dx \quad (12)$$

A بیانگر مساحت سطح مقطع و I_y و I_z ممان اینرسی حول محورهای اصلی می باشند. I_ω ثابت پیچشی مقطع می باشد. این پارامترهای هندسی بصورت روابط زیر نشان داده شده اند.

$$A = \int_A dA \quad (13-الف)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (13-ب)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (13-ج)$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad (13-د)$$

بصورت روش مشابه بر اساس روابط (۵-ب و ۵-ج) و حالت محورهای اصلی قسمت انرژی کرنشی U_{nl} را می توان بصورت تابعی از تنش مقطع اولیه نوشت که بصورت زیر در می آید.

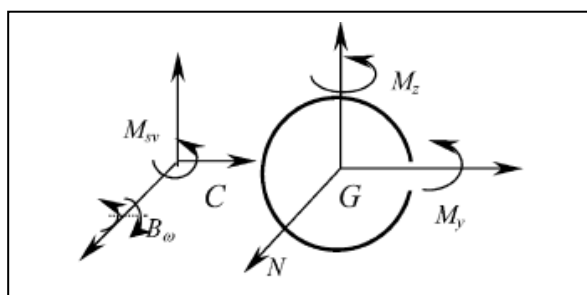
$$U_{nl} = U_{nl}(N) + U_{nl}(M_y) + U_{nl}(M_z) + U_{nl}(B_\omega) \quad (14 - \text{الف})$$

$$U_{nl}(N) = \int_L N \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx \quad (14 - \text{ب})$$

$$U_{nl}(M_y) = \int_L M_y (\beta_y \theta_x'^2 + v'' \theta_x) dx \quad (14 - \text{ج})$$

$$U_{nl}(M_z) = - \int_L M_z (\beta_y \theta_x'^2 - w'' \theta_x) dx \quad (14 - \text{د})$$

$$U_{nl}(B_\omega) = - \int_L \beta_\omega \theta_x'^2 dx \quad (14 - \text{ه})$$



شکل ۳-نمایش تنش ها در مقطع باز

در شکل فوق N بیانگر نیروی محوری و M_y و M_z بیانگر لنگرهای خمشی می باشند. B_ω نیز لنگر دو محوره معرفی شده در مدل Vlasov (شکل ۳) می باشد. بر اساس (۵-ب) و پارامترهای هندسی تنش مقطع در نتیجه تغییر مکانها در روابط زیر آورده شده اند.

$$N = \int_A E \varepsilon_1 dA = EAu'; \quad (15 - \text{الف})$$

$$M_y = \int_A E \varepsilon_y z dA = -EI_y w''; \quad (15 - \text{ب})$$

$$M_z = - \int_A E \varepsilon_z y dA = EI_z v''; \quad (15 - \text{ج})$$

$$B_\omega = - \int_A E \varepsilon_1 \omega dA = EI_\omega \theta_x''. \quad (15 - \text{د})$$

کمانش جانبی تیرها

بررسی یک تیر افقی تحت بار یکنواخت q_z در شکل ۴ نشان داده شده است. در طول تکمیل اعمال شرایط Eurocode 3 مورد استفاده قرار گرفته است. یک مقطع I شکل با یک محور تقارن انتخاب شد و بارها در طول نقاط P در ارتفاع e_z از مرکز برش بارگذاری شده اند. کار بار خارجی W بوسیله رابطه زیر تعریف می شود.

$$W = \int_L q_z w_p dx \quad (16)$$

که w_p تغییر مکان افقی نقطه P می باشد. و با در نظر گرفتن مقدار پیچش ترم مرتبه دوم، عبارت w_p را می توان بصورت زیر نوشت.

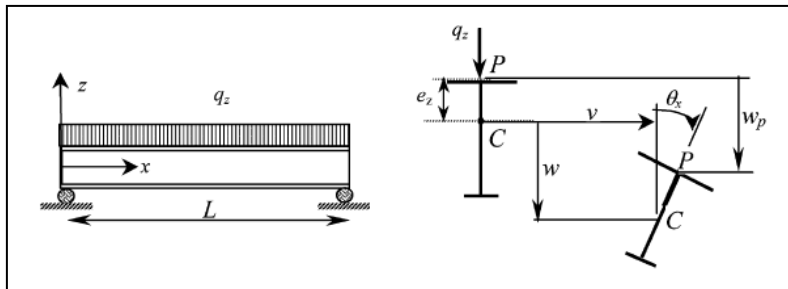
$$w_p = w - e_z (1 - \cos \theta_x). \quad (17)$$

با تخمین $\cos \theta_x = 1 - \frac{1}{2} \theta_x^2$ عبارت نهایی کار خارجی بصورت زیر حاصل می شود.

$$W = \int_L q_z w dx - \frac{1}{2} \int_L q_z e_z \frac{\theta_x^2}{2} dx. \quad (18)$$

بر طبق رابطه ی فوق انرژی پتانسیل کل تیر در رفتار کمانش جانبی بصورت زیر تعریف می شود.

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_L (EI_y w''^2 + EI_z v''^2 + GJ \theta_x'^2 + EI_{\omega} \theta_x''^2) dx + \int_L M_y (\theta_x v'' + \beta_2 \theta_x'^2) dx - \int_L q_z w dx + \frac{1}{2} \int_L q_z e_z \theta_x^2 dx. \quad (19)$$



شکل ۴- تیر I شکل با یک محور تقارن با بارگذاری

روابط تحلیل بارهای کمانشی

دو روش اساسی در ادبیات محاسبه و آنالیز پایداری بارهای کمانشی وجود دارد: روش گالرکین و روش ریتز. روش ریتز بر اساس شرایط تغییر نیافته کل انرژی پتانسیل می باشد. روش گالرکین در حل معادلات دیفرانسل تعادل کاربردی می باشد. با استفاده از این دو روش ، مدهای تغییر مکانی ابتدا بوسیله برخی توابع که با شرایط مرزی سازگارند تخمین زده می شوند. در این کار، روش ریتز در معادله انرژی پتانسیل تیر داده شده مورد استفاده قرار می گیرد. متد گالرکین نیز در معادله تعادل پیچشی مورد استفاده قرار می گیرد. با استفاده از این دو متد و پس از انتگرال گیری در طول تیر بر اساس توابع سازگار برای مدهای تغییر مکانی ، بارهای کمانشی یا لنگرهای کمانشی معادل با حل معادله زیر بدست می آیند.

$$-a_1 M_b^2 + P_z (a_2 e_z + a_3 \beta_z) M_b + P_z^2 \frac{I_{\omega}}{I_z} \left(1 + \frac{GJ L^2}{\pi^2 EI_{\omega}} \right) \quad (20)$$

a_1, a_2, a_3 ضریبها می باشند. M_b لنگر کمانشی مجهول تیر می باشد. P_z بار کمانشی اولر می باشد ($P_z = \pi^2 EI_z / L^2$). حل این معادله برای M_b به ما اجازه می دهد که لنگرهای کمانشی را بصورت زیر بنویسیم:

$$M_b = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[(C_2 e_z + C_3 \beta_z) \pm \sqrt{(C_2 e_z + C_3 \beta_z)^2 + \frac{I_{\omega}}{I_z} \left(1 + \frac{GJ L^2}{\pi^2 EI_{\omega}} \right)} \right]. \quad (21 - الف)$$

ضرایب C_1, C_2, C_3 بصورت زیر می باشند.

$$C_1 = \sqrt{\frac{1}{a_1}} \quad (21 - ب)$$

$$C_2 = C_1 \frac{a_2}{2} \quad (21 - ج)$$

$$C_3 = C_1 \frac{a_3}{2}. \quad (21 - د)$$

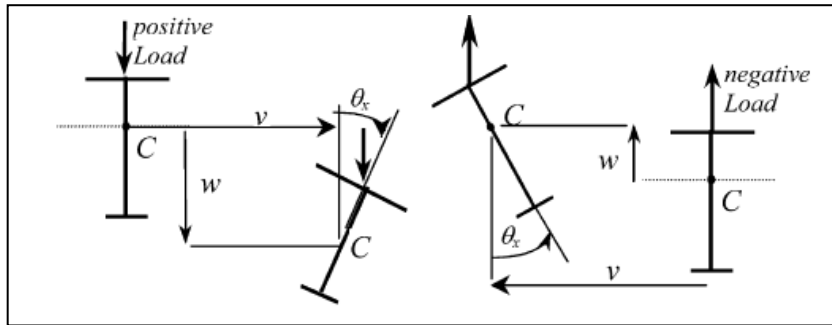
روابط بدست آمده مشابه Eurocode 3 می باشند. ضرایب C_1, C_2, C_3 بستگی به حالت بار وارد شده بر تیر دارند. لنگر کمانشی جانبی تیر تابعی از توزیع لنگر (C_1)، ارتفاع تاثیر بار (C_2) و ضریب β_z (Wagner C_3)، که درجه تک تقارنی مقطع را تعریف می کند.

مقاومت تیر در کمانش جانبی

بر اساس روابط تئوری (۲۲) دو لنگر کمانشی M_b وجود دارد. یکی مثبت و دیگری منفی می باشد و با M_b^+, M_b^- مشخص شده اند. و این عبارات بصورت زیر می باشند.

$$M_b^+, M_b^- = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[(C_2 e_z + C_3 \beta_z) \pm \sqrt{(C_2 e_z + C_3 \beta_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} \right)} \right] \quad (۲۲)$$

در کمانش میله، محققان تنها بار کمانشی مثبت که فشاری است را می بینند و بار کمانشی متناظر با کشش در نظر گرفته نمی شود. در حالیکه در کمانش جانبی تیرها ناپایداری می تواند در هر دو حالت بار مثبت و منفی اتفاق افتد و در این حالت دو لنگر کمانشی مشابه یک تعبیر فیزیکی را دارا می باشند. (شکل ۶)



شکل ۶- تغییر شکل تیر تحت بار کمانشی مثبت و منفی

حال دو لنگر کمانشی M_b^+, M_b^- در حالات دو تقارنی و تک تقارنی مقطع I شکل با هم مقایسه می شوند. اگر مقطع دو تقارنی I شکل دارای مرکز برش (C)، در مرکز G داشته باشد، این نشاندهنده این است که ضریب Wagner برای چنین مقاطعی برابر صفر است. لنگر کمانشی تنها به دو ضریب C_1, C_2 بستگی به این دارد. هنگامیکه که بارها بر روی مرکز برشی وارد می شوند، پارامتر ارتفاع بار e_z حذف شده و داریم:

$$M_b^+, M_b^- = \pm C_1 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \left[\sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} \right)} \right] \quad (۲۳- الف)$$

مقدار لنگر کمانش M_b^+, M_b^- با هم برابر هست بنابراین:

$$M_b^+ = |M_b^-| \quad (۲۳- ب)$$

در هنگامیکه که بار در مرکز برش اعمال نمی گردد ($e_z \neq 0$) دو لنگر کمانشی بدست خواهد آمد:

$$M_b^+, M_b^- = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[(C_2 e_z) \pm \sqrt{(C_2 e_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} \right)} \right] \quad (۲۴- الف)$$

مقدار لنگر کمانش M_b^+, M_b^- با هم برابر نیستند بنابراین:

$$M_b^+ \neq |M_b^-| \quad (۲۴- ب)$$

برای مقطع تک تقارن I شکل ضریب Wagner غیر صفر می باشد. لنگر کمانشی به هر سه ضریب C_1, C_2, C_3 وابسته می باشد. با این وجود هنگامیکه بار به مرکز برش وارد می شود ($e_z = 0$) دو لنگر کمانشی مطابق رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$M_b^+, M_b^- = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[(C_3 \beta_z) \pm \sqrt{(C_3 \beta_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left(1 + \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} \right)} \right] \quad (۲۵)$$

چیزی را که می توان بررسی کرد این است که بزرگی دو لنگر کمانشی برابر نیستند و رابطه (۲۴-ب) ارضا شده است. با یک روش یکسان، هنگامی که بار بر مرکز برش وارد نمی شود همه ضرایب دخالت می نمایند. واضح است که بزرگی دو لنگر کمانشی متفاوت بوده و همچنین رابطه (۲۴-ب) نیز برقرار خواهد بود.

نتایج المان محدود برای المانهای تیرشکل

در ابتدا توضیحی راجع به نتایج عددی المان تیر (B31OS) داده می شود، که بار کمانشی تحلیلی و عددی بارگذاری در جدول ۱ برای مقطع اول نشان داده شده است. دو موقعیت بارگذاری مورد بررسی قرار گرفت لنگرهای مثبت و منفی کمانشی متناظر نشان داده شده است. چیزی که در این قسمت می توان مشاهده کرد مطابقت نتایج حل با قاعده با المانهای تیر سه بعدی می باشد. (B31OS). لنگر کمانشی مثبت و منفی هنگامی که بار در مرکز برش وارد می شود یکسان می باشد و هنگامی که بار در بالای بال وارد می شود متفاوت است. بارهای کمانشی تحلیلی و عددی متناظر با بار یکسان، برای مقطع دوم در حالتی که بار بر روی مرکز برش اعمال گردیده است، در جدول ۲ نشان داده شده است. دو ستون اول حل عددی محاسبه شده بر اساس ضریب $C_3 = 1.73$ Wagner مطابق 3 eurocode می باشد. نتایج محاسبات به همراه ضریب پیشنهاد شده $C_3 = 0.41$ در ستونهای سوم و چهارم مرتب شده اند. نتایج Abaqus با المانهای تیری B31OS در ستونهای پنجم و ششم مرتب شده اند.

L(m)	Load on shear centre				Load on top flange			
	EC3 (+)	EC3 (-)	B31OS (+)	B31OS (-)	EC3 (+)	EC3 (-)	B31OS (+)	B31OS (-)
4	204.26	-204.26	204.51	-204.51	134.65	309.85	133.41	-310.63
5	145.86	-145.86	146.05	-146.05	100.20	-212.32	99.35	-212.5
6	112.81	-112.81	112.95	-112.95	80.41	-158.27	79.74	-159.05
7	91.89	-91.89	92.01	-92.01	67.63	-124.84	67.06	-125.51
8	77.55	-77.55	77.6	-77.6	58.68	-102.48	58.17	-103.06

جدول ۱- ممان های کمانشی تئوری و عددی بر حسب kNm برای مقطع A

L(m)	EC3; $C_3 = 1.73$		Improved; $C_3 = 0.41$		Abaqus (B31OS)		Analytic; $C_3 = 0$	
	Positive	Negative	Positive	Negative	Positive	Negative	Positive	Negative
4	259.79	-42.98	134.43	-83.05	105.98	-106.05	105.67	-105.67
5	175.59	-36.83	98.52	-65.64	80.65	-80.68	80.41	-80.41
6	129.15	-32.79	77.48	-54.65	65.24	-65.25	65.07	-65.07
7	100.59	-29.80	63.78	-47.00	54.86	-55.18	54.75	-54.75
8	81.63	-27.42	54.17	-41.32	47.38	-47.38	47.3135	-47.3135

جدول ۲- ممان های کمانشی تئوری و عددی بر حسب kNm برای مقطع B (بار در مرکز برش وارد شده است)

نتیجه جدول های ۱ و ۲ بیانگر این نتیجه است که لنگرهای کمانشی عددی را می تواند به سادگی با استفاده از حل تحلیلی با $C_3 = 0$ و پارامترهای هندسی بدست آورد و نتایج متناظر در دو ستون آخر گزارش داده شده است. این مثال ساده اثبات می کند که المان تیری اعوجاج یافته سه بعدی (B31OS) برای آنالیز پایداری مقاطع یک تقارنی مناسب نمی باشد.

نتیجه

این مقاله پایداری عضوهای جدار نازک با مقطع باز را مورد بررسی قرار داده است. مدل ایجاد شده اجازه داده تا کمانش میله و کمانش جانبی تیرهای غیر آزاد را مورد مطالعه قرار دهیم. کمانش جانبی مقطع I شکل تک تقارن اصلاح شده و راه حل تحلیلی فرموله شده است. مقاومت در برابر کمانش جانبی تیر تابعی از توزیع تنش خمشی، پارامتر ارتفاع بار و درجه تک تقارنی مقطع که ضریب Wagner گفته می شود می باشد. ضرایب ضرایب C_1, C_2, C_3 برای برخی از حالات بارگذاری انتخابی، محاسبه گشته و با ضرایب معمول در Eurocode 3 مقایسه شده است و با ضرایب معمول در Eurocode 3 مقایسه شده است و مشخص شد که بعضی از ضرایب شبیه آنچه که در Eurocode 3 آمده بوده اما ضریب C_3 برای برخی از حالات بارگذاری بسیار متفاوت بوده است. در شبیه سازی عددی بارهای کمانش جانبی و یا لنگر معادل با آن از حل مسئله مقدار ویژه بدست آمده است.

تیرهای سه بعدی با در نظر گرفتن اعوجاج در پایداری مقطع دو تقارن I شکل مورد استفاده قرار گرفته شد. اما المانهای پوسته ای برای آنالیز پایداری مقاطع I شکل تک تقارن ترجیح داده شد. با مقایسه مثالهای مورد مطالعه نشان داده شد که راه حل اصلاح شده با نتایج المان های پوسته ای سازگار بوده و اغلب راه حل های عددی لنگرهای کمانشی مقطه تک تقارن I شکل و مقاومت تیر در رفتار کمانش جانبی را دست بالا در نظر می گیرد.

مراجع

- [1] Bleich F. Buckling strength of metal structures. New York: McGraw-Hill
- [2] Barsoum RS, Gallagher RH. Finite element analysis of tensional and tensional-flexural stability problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*
- [3] Eurocode 3, Design of steel structures, Part 1.1: General rules for buildings. European Committee for Standardization,
- [4] Mohri F, Brouki A, Roth JC, Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams, *Journal of Constructional Steel Research*
- [5] Mohri F, Brouki A, Roth JC. Lateral buckling of thin-walled beams under asymmetric loads. *Proceedings of the Conference Euro steel*