

محاسبه بار حدی کران پایین در سازه‌ها و قطعات ترک‌دار با استفاده از روش کاهش مدول الاستیسیته

عطا... محمودپور^۱، کاوه کرمی^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک جامدات، دانشگاه علم و صنعت ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد عمران سازه، دانشگاه علم و صنعت ایران

Ataallah_mahmoodpour@mecheng.iust.ac.ir

خلاصه

هدف از این تحقیق ارائه روشی قدرتمند برای ارزیابی و تعیین بار حدی کران پایین در قطعات صنعتی و سازه‌های مهندسی است. تعیین تنش در مجاورت نوک ترک، تعیین سرعت رشد ترک، تخمین عمر باقیمانده سازه و قطعات ترک‌دار جزء مهمترین پارامترهای هستند که در طراحی می‌توان از آن بهره جست. در این مقاله بار حدی کران پایین با استفاده از روش کاهش مدول الاستیسیته برای یک نمونه استاندارد CT با طول ترک‌های مختلف در حالت دوبعدی برای تنش و کرنش صفحه‌ای محاسبه شده است. با مقایسه این نتایج با نتایج تحقیقات پیشین می‌توان نتیجه گرفت که این روش، روشی ساده و پرکاربرد در تعیین بار حدی کران پایین برای سازه‌ها و قطعات صنعتی می‌باشد.

کلمات کلیدی: آنالیز حدی، تنش و کرنش صفحه‌ای، کران پایین، کاهش مدول الاستیسیته

۱. مقدمه

بار گسیختگی پلاستیک کاربرد وسیعی در علوم مهندسی دارد که از آن جمله می‌توان به کاربرد آن در طراحی، تخمین طول عمر و آنالیز گسیختگی اجزاء مکانیکی و سازه‌های دریایی اشاره کرد. یکی از موارد مهم کاربرد این روش، تعیین بار گسیختگی سازه‌ای و قطعات مکانیکی در حالتی است که در حالت اولیه، سازه ترک‌دار باشد. برای تعیین مقاومت سازه‌ای، سیستم را با مقاومتی فراتر از حد الاستیک با توجه به مقاومتشان طراحی می‌کنند. بار گسیختگی را به طور دقیق نمی‌توان پیدا کرد اما اغلب نیاز است آنها را در حالت کاملاً پلاستیک از طریق آنالیز حدی کران بالا و پایین تحلیل کرد. این تئوری ما را قادر می‌سازد تا بار گسیختگی لازم را در مرزها بدست آوریم. راه حل‌های مطلوب بسیاری در بارگذاری حدی و شرایط مرزی وجود دارند که اساس آنها معیارهای تسلیم مختلف و روش‌های آنالیز آنهاست [۱-۳].

از جمله این موارد روش‌های تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی را می‌توان نام برد. استفاده از روش‌های تحلیلی برای مسائل با بارگذاری و هندسه پیچیده مشکل است. روش‌های آزمایشگاهی نیز عمدتاً پر هزینه و زمان‌برند و این از لحاظ کاربرد امروزی به صرفه نیست. اما روش‌های عددی بر پایه المان محدود و با فرض رفتار ماده کاملاً الاستیک یا غیر الاستیک برای مسائل با شکل هندسی و بارگذاری پیچیده جهت تخمین بار گسیختگی پلاستیک مناسب می‌باشند. تحلیل المان محدود کاملاً الاستیک فقط نیازمند حل معادلات تعادل و سازگاری به صورت خطی است ولی تحلیل غیر الاستیک منجر به حل معادلات غیر خطی می‌شود [۲].

کاربرد برنامه‌ریزی خطی در آنالیز حدی اولین بار توسط کلارنس و گرینبرگ (۱۹۵۱)، دورن گرینبرگ (۱۹۵۱) و برنامه‌ریزی خطی در طراحی پلاستیک توسط فوکس (۱۹۵۴) انجام شد. چارنس، لمک و زینکوویچ (۱۹۵۶) نسبت بین تئوری استاتیکی - سینماتیکی در پلاستیسیتیه و برنامه ریزی خطی را اثبات کردند. از آن به بعد جمع زیادی از محققان این روش را برای سطح وسیعی از مسائل تیرها، صفحه‌ها، پوسته‌ها، مخازن تحت فشار، تنش‌های مرکب و مواد مختلف تعمیم داده‌اند. برخی روش ترکیبی برای آنالیزی المان محدود و تکنیک‌های حدی در محاسبه بار گسیختگی پلاستیک

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک گرایش جامدات دانشگاه علم و صنعت ایران.

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه دانشگاه علم و صنعت ایران.

توسط هیوتولا (۱۹۷۶)، گاردین، براک (۱۹۹۰) ارائه شده است. همچنین در زمینه حل مکانیک خاک لیسمر (۱۹۷۰) و اسلون (۱۹۸۸) روش‌های را معرفی کردند که در این روش‌ها تابع هدف (بار گسیختگی پلاستیک) و قیدهای حاصل از معادلات تعادل همراه با شرایط مرزی و معیار تسلیم با همدیگر ترکیب شده و با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی (برنامه ریزی خطی) بار گسیختگی پلاستیک بدست می‌آید [۲].

اولین مطالعات در رابطه با روش کاهش مدول الاستیسیته توسط دالا بر اساس فرمول‌بندی تنش ارائه شده است [۴]. از جمله کارهای دیگری که در این راستا انجام شده است تحلیل بار حدی در پوسته‌های نازک می‌باشد. مکنزی و بویل از طریق روش جبران الاستیک و تعمیم آن به معیار تسلیم نتایجی جالب توجه‌ای را به دست آوردند. همچنین در چند سال اخیر تحقیقات مفید دیگری نیز توسط سوچک، الزاک، میسونت و زیچکوفسکی در رابطه با معیار تسلیم در صفحات و پوسته‌های نازک به عمل آمده است. با مقایسه بار حدی با نتایج حاصل از نشریات و نتایج الاستو-پلاستیک نشان می‌دهد که این روش، روشی قابل قبول برای به دست آوردن سریع نتایج عملی می‌تواند باشد.

۲. آنالیز حدی

آنالیز حدی، حداکثر باری که سازه با رفتار کاملاً پلاستیک می‌تواند تحمل کند را مورد بررسی قرار می‌دهد که این بار را "بار حدی" سازه می‌نامند. هنگامی که این بار به سازه اعمال می‌شود تغییر شکل‌ها در سازه به بینهایت می‌رسد و سازه را به شکل یک مکانیزم تبدیل می‌کند [۶]. برای فرمولاسیون تئوری پلاستیسیتیه براساس تئوری آنالیز حدی میدان تنش‌های مجاز استاتیکی یا سیستم تعادل که نوعی از میدان تنش‌هاست شرایط زیر را باید ارضاء کند:

الف: شرایط تعادل در نقطه‌ای از جسم.

ب: شرایط مرزی برای تنش‌ها.

ج: شرایط تسلیم (در هیچ نقطه‌ای از جسم، شرایط تنش تسلیم را نقص نمی‌کند).

۳. معیار تسلیم

برای محاسبه بار حدی به یکی از معیارهای تسلیم نیاز است. معمولاً در این رابطه از معیارهای ترسکا و ون‌مایز استفاده می‌شود. در این حالت تسلیم در جسم موقعی بوجود می‌آید که انرژی پیشروی جسم مساوی انرژی پیچندگی در حالت کشش ساده باشد:

$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2] = S_y^2 \quad (1)$$

۴. آنالیز حد پایین

با توجه به اینکه تحلیل رفتار واقعی مواد به صورت الاستیک-پلاستیک، به توان محاسباتی بالا و زمان زیادی نیاز دارد همیشه سعی بر این است رفتار غیرالاستیک ماده در ناحیه تنش بالا به وسیله آنالیز الاستیک شبیه‌سازی شود. در این روش مدول الاستیسیته نسبت به ناحیه تنش، به صورت سیستماتیک کاهش می‌یابد تا رفتار غیر الاستیک آن نواحی مدل شود. این روش نه تنها به زمان و توان محاسباتی کم، بلکه به مدل رفتاری ماده نیز نیاز ندارد.

از دیگر روش‌های تعیین بار گسیختگی پلاستیک ترکیب تئوری آنالیز حدی با روش المان محدود که شامل روش‌های ترکیبی آنالیز حد پایین و حد بالا با روش المان محدود می‌باشد. در این روش‌های ترکیبی با به کارگیری آنالیز حدی، از حل معادلات غیر خطی که در تحلیل‌های الاستو-پلاستیک به آنها برخورد می‌شود و با بهره‌گیری از روش المان محدود نیز امکان حل مسائل با هندسه و بارگذاری پیچیده میسر می‌گردد. نحوه آنالیز حدی المان محدود بدین صورت است که یک سطح را به قسمت‌های متعددی با سطح کوچک تبدیل می‌شوند، که با تفکیک به المان‌های کوچکتر یک قطعه پیچیده را به صورت تکه‌های مجزا با شرایط هندسی و مرزی و همچنین شرایط بارگذاری خاص هر المان در می‌آورد.

در سالهای اخیر یک مدل اصلاح شده از روش کاهش مدول الاستیسیته بر اساس حل الاستیک متوالی توسط مکنزی و همکارانش به نام جبران-سازی مدول الاستیسیته ارائه شده است [۶]. در این روش به صورت تکراری حل الاستیک انجام گرفته و مدول الاستیسیته با توجه به معادله زیر اصلاح می‌شود:

$$E_i = E_{i-1} \frac{\sigma_y}{\sigma_{i-1}} \quad (2)$$

در اینجا σ_y تنش تسلیم، σ_{i-1} تنش در هر المان، E_{i-1} مدول الاستیسیته قبلی و E_i مدول الاستیسیته جدید می‌باشد. در ابتدا با استفاده از روش المان محدود آنالیز الاستیک انجام می‌شود و در مرحله دوم مدول الاستیسیته مطابق با معادله (۲) اصلاح می‌گردد. به ازای اعمال بار اصلاح مدول الاستیسیته به تعداد محدودی تکرار می‌شود، اگر تنش معادل ماکزیمم المانها به مقدار تنش تسلیم ماده یا کمتر رسید بار را افزایش داده و اصلاح مدول الاستیسیته تکرار می‌شود. کمترین مقدار نیروی که روش اصلاح مدول الاستیسیته نتواند تنش معادل را به تنش تسلیم برساند را بار حدی کران پایین در سازه می‌نامند. با توجه به مطالعات، فرمول زیر را برای همگرایی این روش می‌توان ارائه کرد [۸]:

$$E^{i+1} = E^i \left(\frac{\sigma_{ref}^i}{\sigma_{eq}^i} \right)^q \quad (3)$$

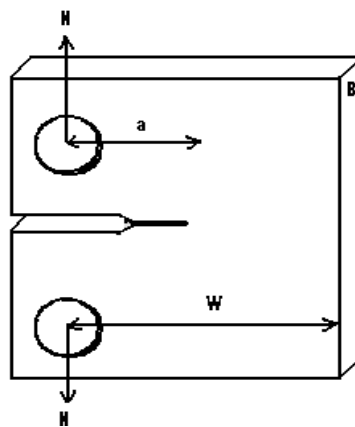
برای حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مقدار q را به ترتیب ۱ و ۲ جاگذاری کرد. اما در حالت عمومی تر مقدار بهینه را از رابطه زیر می‌توان

به دست آورد:

$$q = \frac{\ln \left(\frac{\sigma_{ref}^2}{\sigma_{eq}^2 + \sigma_{ref}^2} \right)}{\ln \left(\frac{\sigma_{ref}}{\sigma_{eq}} \right)} \quad (3)$$

۵. بار حدی نمونه CT

نتایج بار حدی تحلیلی مربوط به نمونه SENT در حالت چرخش آزاد برای تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای از روی معادلات ریچارد و اوینگ می‌توان محاسبه کرد. با استفاده از این روابط بار حدی را در نمونه CT در حالات مختلف با نتایج پایانی این مقاله مقایسه می‌شود [۹،۱۰].



شکل (۱): نمونه CT با پارامترهای مربوطه.

۱.۵. مشخصات نمونه CT

این نمونه از جنس EGFV/CRMOV در نظر گرفته شده است. مشخصات EGFV/CRMOV در دو دمای مختلف به شرح زیر می‌باشد [۱]:

دمای $20^\circ C$:

مدول یانگ : 203 [Gpa]

تنش تسلیم محوری : 594 [Gpa]

دمای $550^{\circ}C$:

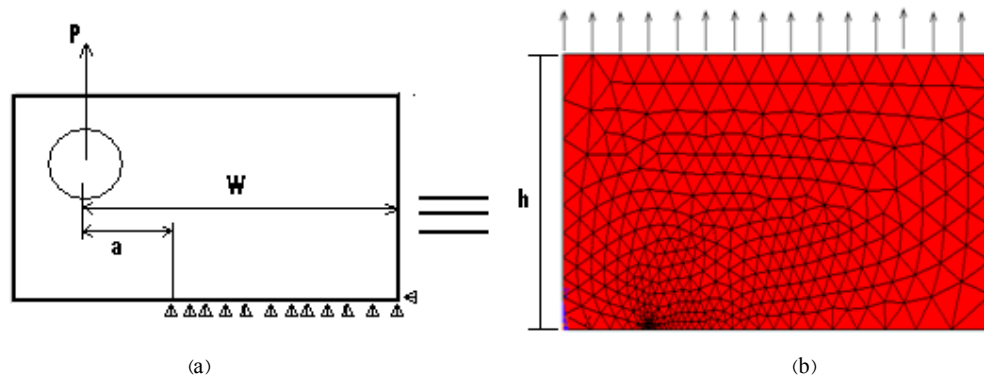
مدول یانگ : $203 [Gpa]$

تنش تسلیم محوری : $594 [Gpa]$

عرض نمونه CT در این مقاله ۵۰ میلیمتر در نظر گرفته شده است. برای طول ترک‌های ۰، ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ۴۰ و ۴۵ میلیمتر بار حدی محاسبه شده است.

۲.۵. مدل‌سازی نمونه CT

برای مدل‌سازی نمونه CT از نرم افزار المان محدود ANSYS استفاده شده است. با توجه به تقارن نصف نمونه در نرم‌افزار مدل شده است. به علت اینکه در این روش، المان‌هایی استفاده می‌شود که تنش آنها از تنش تسلیم ماده بیشتر باشد، بایستی تمرکز تنش در محل اعمال بار به نحوی حذف شود. برای این منظور مطابق با شکل (۲) بار گسترده به ضلع بالایی نمونه اعمال می‌شود به طوری‌که برآیند بار گسترده اعمال شده همان اثر واقعی را داشته باشد. بار گسترده اعمال شده به نمونه اجازه می‌دهد که در ضلع بالایی چرخش آزاد داشته باشد و این مشابه شرایط اعمال بار واقعی است.



شکل (۲): شماتیک مدل‌سازی نمونه CT در نرم‌افزار

برای اعمال شرایط مرزی ضلع پایینی نمونه که در آن ترک نیست را به عنوان شرایط مرزی متقارن تعریف کرده و به سمت راست قید جابجایی افقی اعمال می‌شود برای اینکه در این راستا نیز مقید گردد. ارتفاع h باید به گونه‌ای در نظر گرفته شود که در حین اصلاح مدول الاستیسیته در قسمتهای بالای نمونه، توزیع تنش یکسان حاکم باشد یا به عبارت بهتر در آن قسمت تنش بیشتر از تنش تسلیم ماده نباشد. برای این منظور با توجه به آنالیزهای انجام شده h را ۱۵۰ میلیمتر می‌توان در نظر گرفت.

در مش‌بندی نمونه CT از المان PLATE۲۳ استفاده شده است این المان قابلیت مدل کردن تنش در نوک ترک و همچنین رشد ترک را دارد. برای اینکه بتوان شرایط تنش در نوک ترک را شبیه‌سازی کرد باید سینگولاریتی را در نوک ترک نظر گرفت بدین معنا که در المان درجه دوم موقعیت گره وسط المان را از $1/2$ به $1/4$ تغییر داده می‌شود تا به این ترتیب بتوان شرایط سینگولاریتی را در نوک ترک در حالت الاستیک ارضاء نمود. سپس برای هر یک از المانها خواص جداگانه‌ای در نظر گرفته می‌شود که در آغاز همان خواص ماده بکار گرفته است. ابتدا آنالیز الاستیک انجام شده و المان‌هایی که تنش معادل ون‌مایسز آنها از تنش تسلیم بیشتر باشد توسط ماکرو شناسایی می‌شوند و مدول الاستیسیته مربوط به آن مطابق با معادله (۳) اصلاح شده و دوباره آنالیز با مدول الاستیسیته جدید تکرار می‌شود. تعداد تکرارها در این تحقیق ۵۰ نوبت است. بعد از این تکرارها تنش ماکزیمم معادل در هر یک از المانها بررسی می‌شود، اگر مقدار آن 372 Mpa و یا کمتر باشد به صورت سیستماتیک بار افزایش می‌یابد و برنامه دوباره اجرا می‌شود تا جاییکه تنش ماکزیمم در المانها بزرگتر از 372 Mpa شود. بعد از این مرحله از روی آخرین بار اعمالی که شرط را ارضاء کند می‌توان بار حدی کران پایین را یافت.

۳.۵. بررسی نتایج بار حدی

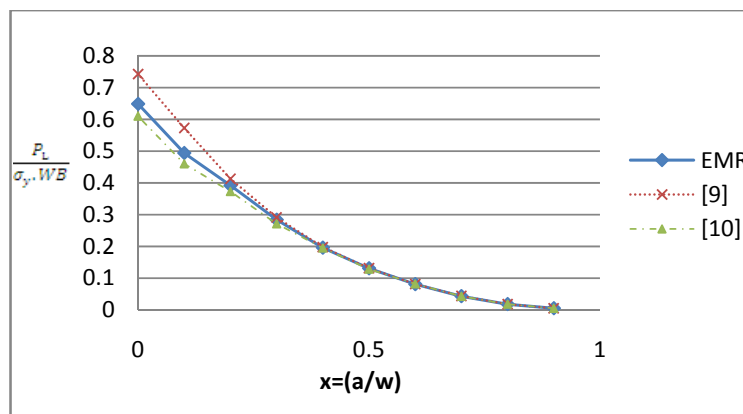
با توجه به اندازه ترک در مدل CT بار حدی از روش کاهش مدول الاستیسیته به شکل $\frac{P_L}{\sigma_y \cdot WB}$ نرمالیزه می‌شود. در این اینجا B بیانگر ضخامت قطعه و P_L بار حدی کران پایین است. مقادیر نرمالیزه شده بار حدی برای نمونه CT در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای و برای اندازه طول ترکهای مختلف در جداول (۱) و (۲) ارائه شده است.

جدول (۱): نتایج بار حدی نرمالیزه شده برای نمونه CT در حالت کرنش صفحه‌ای

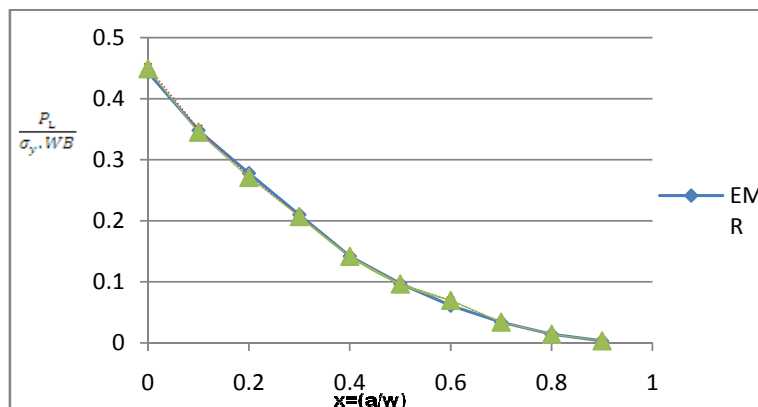
	X=۰	X=۰.۱	X=۰.۲	X=۰.۳	X=۰.۴	X=۰.۵	X=۰.۶	X=۰.۷	X=۰.۸	X=۰.۹
$\frac{P_L}{\sigma_y \cdot WB}$	۰.۶۴۹	۰.۴۹۴	۰.۳۹۲	۰.۲۸۴	۰.۱۹۶	۰.۱۳۱	۰.۰۸۱	۰.۰۴۳۳	۰.۰۱۸۲	۰.۰۰۵۲

جدول (۲): نتایج بار حدی نرمالیزه شده برای نمونه CT در حالت تنش صفحه‌ای

	X=۰	X=۰.۱	X=۰.۲	X=۰.۳	X=۰.۴	X=۰.۵	X=۰.۶	X=۰.۷	X=۰.۸	X=۰.۹
$\frac{P_L}{\sigma_y \cdot WB}$	۰.۴۴۳	۰.۳۴۸	۰.۲۷۸	۰.۲۱	۰.۱۴۲	۰.۰۹۷	۰.۰۶۱	۰.۰۳۴	۰.۰۱۴۲	۰.۰۰۳۴



نمودار (۱): مقایسه نتایج بار حدی نمونه CT در حالت کرنش صفحه‌ای.



نمودار (۲): مقایسه نتایج بار حدی نمونه CT در حالت کرنش صفحه‌ای.

برای بررسی اعتبار اندازه بار حدی نرمالیزه شده در روش کاهش مدول الاستیسیته برای قطعات ترکدار، نتایج حاصله با نتایج دیگر به صورتی که در نمودارهای (۱) و (۲) ارائه شده است. نمودار (۱) نتایج بار حدی نرمالیزه شده را نسبت به اندازه X در حالت کرنش صفحه‌ای نشان می‌دهد منحنی اول از بالا اندازه این بار را برای معیار تسلیم ترسکا [۹]، منحنی دوم این تغییرات را با استفاده از روش کاهش مدول ارائه می‌دهد و سومین منحنی همان تغییرات را برای معیار تسلیم ون‌مایسز نشان می‌دهد [۱۰]. با مقایسه این سه معیار، به وضوح می‌توان دید که اختلاف اندازه بار حدی نرمالیزه شده به ازای افزایش نسبت X به یک عدد ثابت میل می‌کند. نمودار (۲) بار حدی نرمالیزه شده را در حالت تنش صفحه‌ای برای هر سه معیار نشان می‌دهد با این تفاوت که در این حالت اختلاف بارهای حدی نرمالیزه شده برای هر سه معیار کمتر از حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد.

۶. نتیجه‌گیری

روش کاهش مدول الاستیسیته برای معیار تنش تسلیم مختلف انجام شده است و نتایج نشان داد که این روش مستقل از مقدار تنش تسلیم می‌باشد. بدین معنا که مقادیر نرمالیزه تنش به تنش تسلیم بستگی ندارد. با توجه به مقادیر بار حدی محاسبه شده و در مقایسه با تئوری‌های موجود می‌توان گفت که روش کاهش مدول الاستیسیته برای تمام اندازه طول ترک و نمونه‌های استاندارد DENT, SENT, CT و MT در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای معتبر می‌باشد. از طریق این روش می‌توان بار حدی کران پایین را در تمام سازه‌های مهندسی و قطعات ترکدار بدون نیاز به خواص غیر خطی ماده بدست آورد. همچنین به علت عدم حساسیت این روش نسبت به نوع المانها در نوک ترک، این روش را در سازه‌های سه بعدی بدون نیاز به تعریف نوک ترک می‌توان بکار گرفت. با مقایسه این نتایج با نتایج حاصل از کارهای قبلی می‌توان دید که این روش با یک تحلیل ساده الاستیک در زمان کوتاه و حجم محاسباتی کم به نتیجه مطلوب می‌رسید.

مراجع:

- Schroeder, J. & Rangerajan, P., "Upper bounds to limit pressres of branch-pipe tee connections", Proceedings of the First International Conference on Pressure Vessel Technology, Delft, Netherlands, Part ۱ (۱۹۶۹) ۲۷۲-۲۹۲.
- Modrres-Motlagh, A. "lower bound to Collapse load for Structures" A Thesis Subuitted in fulfillment requirements for the degree of philosophy, University of new South Wales, Australia (۱۹۹۷).
- Hamilton R, Mackenzie D, Shi J, Boyle JT, (۱۹۹۶), "Simplified lower bound limit analysis of pressurized cylinder-cylinder intersection shells using a generalised yield criteria". Int J Pres Ves Pip; ۶۷: ۲۱۹-۲۶.
-
- A.K. Dhalla, (۱۹۸۷), "A simplified Procedure to Classify Stresses for Elevated Temperature Service. Proc. ASME-PVP, ۱۲۰, pp. ۱۷۷-۱۸۸.
- D.L. Marriot, (۱۹۸۷), "Evaluation of Deformation or Load Control of Stresses under Inelastic Condition using Elastic Finite element Stress Analysis", Proc. ASME PVP Conf, Vol. ۱۳۶.
- G.R. Irwin, (۱۹۵۷), Journal of Applied Mechanics, Vol. ۲۴, PP. ۳۶۱-۳۶۴.
- D. Mackenzie and J. T. Boyle, (۱۹۹۳), "A method of estimating limit load by interative elastic analysis. I- simple examples". Int. J. Pres. VES Piping ۵۳, ۷۷-۹۵. R. Adibi- Asl, Ihab F. z Fanous, R. Seshadri, (۲۰۰۶), "Elastic modulus adjustment procedures Improved convergence schemes". Int. J. Pres. Ves. Piping ۸۳, ۱۵۴-۱۶۰.
- J. R. Haigh and C.E. Richard, (۱۹۷۴), "Yield Points Loads and Compliance Function of Fracture Mechanics Specimens", CEGB CERL Memo NO. RD/L/M۴۶۱.
- A. G. Miller, (۱۹۸۸), "Review of limit loads of structures containing defects", ۳ Edition, General Elaectricity Generating Board.
- V. Kummar, M. D. German and C.F. Shih, (۱۹۸۱), "An engineering for Elastic- Plastic Fracture Analysis", EPRI Report NP-۱۹۳۱, Palo Alto, CA.