

# معادلات منحنی مشخصه در خاکهای غیر اشباع

مجتبی احمدآبادی

دانشجوی کارشناسی ارشد خاک و پی دانشگاه تربیت معلم تهران

Ahmadabadi.m@gmail.com

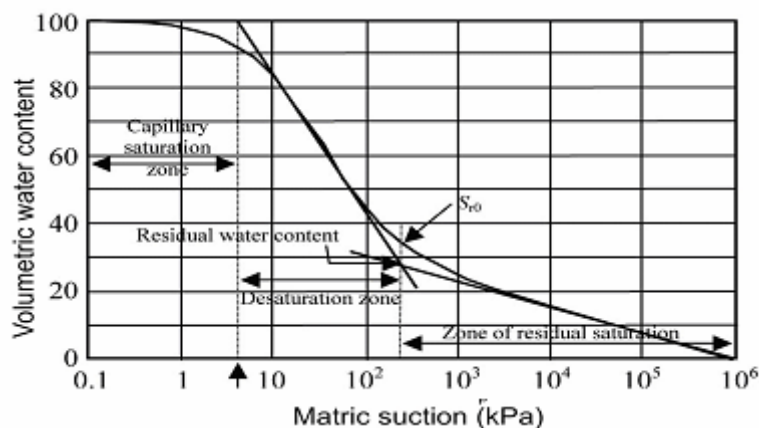
## خلاصه

موضوع این مقاله بدست آوردن منحنی مشخصه‌ای در خاکهای غیر اشباع است که فرمولهای مختلف محققین را بررسی و روابط بین آنها و جزئیات منحنی مورد بحث قرار می دهد و در هر فرمول نشان می دهد که چه عواملی در منحنی مشخصه دخیل می باشد و نسبت تاثیر این متغیرها تا چه میزان در منحنی مشخصه می باشد. همچنین در هر فرمول با تغییر دادن متغیرها گرافهای این فرمولها رسم می گردد و مشخص می کند که در هر نوع خاک بهتر است که از چه فرمولی استفاده شود و در نهایت برنامه‌ای جهت رسم بهترین منحنی مشخصه در نرم افزار MATLAB ارائه می گردد.

کلمات کلیدی: منحنی مشخصه آب و خاک، خاک غیر اشباع، Residual Water Content، Air entry value

## مقدمه :

خاکهای غیر اشباع به محیط های 3 فازه که شامل آب و خاک و هوا می باشد تقسیم می گردند. که رفتار فشار آب و فشار هوا در آنها قابل توجه و بررسی می باشد مطابق شکل شماره (1) منحنی مشخصه آب و خاک برای یک نوع خاک نشان داده شده است که در آن محور عمودی درصد رطوبت حجمی و محور افقی فشار حفره ای که شامل  $(u_a - u_w)$  می باشد شامل می گردد. مطابق شکل نقطه ای Air Entry Value (حداقل فشاری که هوای می تواند به عنوان فاز مستقل وجود داشته باشد) و نقطه Residual Water Content (درصد رطوبت پسماند که کمترین درصد رطوبتی است که آب می تواند به عنوان فاز مستقل وجود داشته باشد و کمتر از آن حالت نم باشد) که نقطه اول که با طول مشخص و نقطه دوم با عرض مشخص می شود که همانطور در شکل می بینیم تا نقطه AEV ناحیه کاپیلاره و اشباع و از AEV تا طول نقطه RWC ناحیه غیر اشباع و بعد از آن هم ناحیه خشک می باشد. منحنی مشخصه آب و خاک به رابطه بین مقدار آب و خاک و نیروی  $u_a - u_w$  می پردازد و خیلی از خاصیت های خاک مانند ضریب نفوذ پذیری و مقاومت برشی و تغییر حجم ناشی از فشار هیدروستاتیکی توزیع اندازه ریزدانه ها و مقدار آب محصور شده در خلل و خرج دانه ها از منحنی مشخصه آب و خاک قابل برداشت می باشد. از عوامل مهم در منحنی مشخصه آب و خاک عبار تند از 1- اثر نسبت تخلخل 2- اثر مقدار رطوبت اولیه 3- نوع خاک 4- ساختار خاک مترکم 5- معدن شناسی ، که در میان عوامل بالا مقدار رطوبت اولیه بیشترین اثر را روی ساختار خاک دارد.

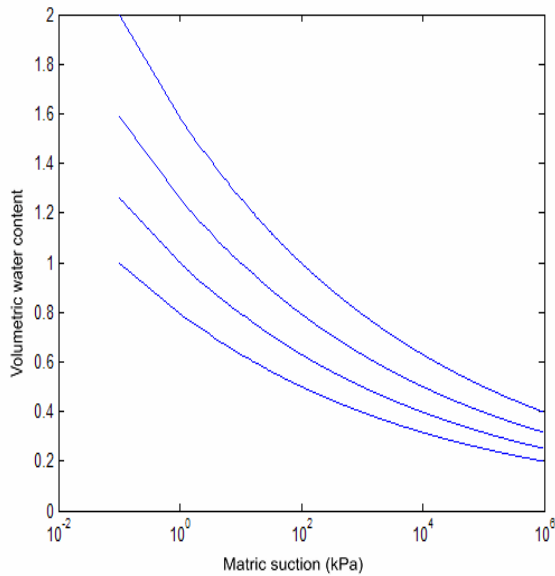


شکل 1- منحنی مشخصه آب و خاک

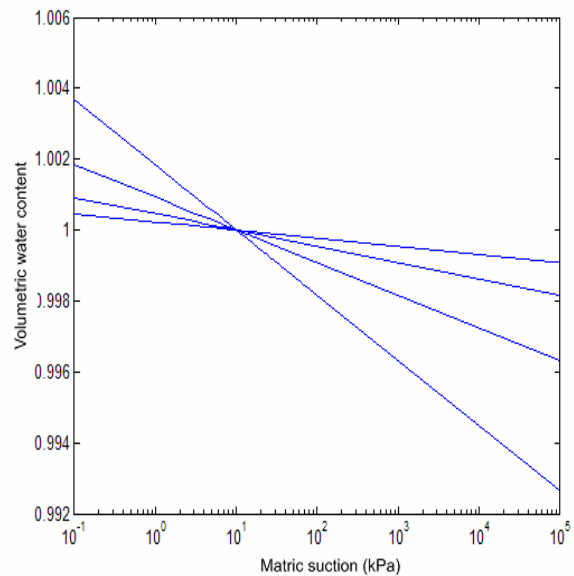
فرمول Brook and corey (1964) :

$$\theta = \left(\frac{\psi_b}{\psi}\right)^\lambda \quad (1)$$

که در آن  $\lambda$  مربوط به توزیع اندازه ها می باشد و  $\psi_b \approx (AEV)$  مربوط به Air entry value می باشد



شکل 3- منحنی Brook برای **a** ثابت و **b** متغییر



شکل 2- منحنی Brook برای **b** ثابت و **a** متغییر

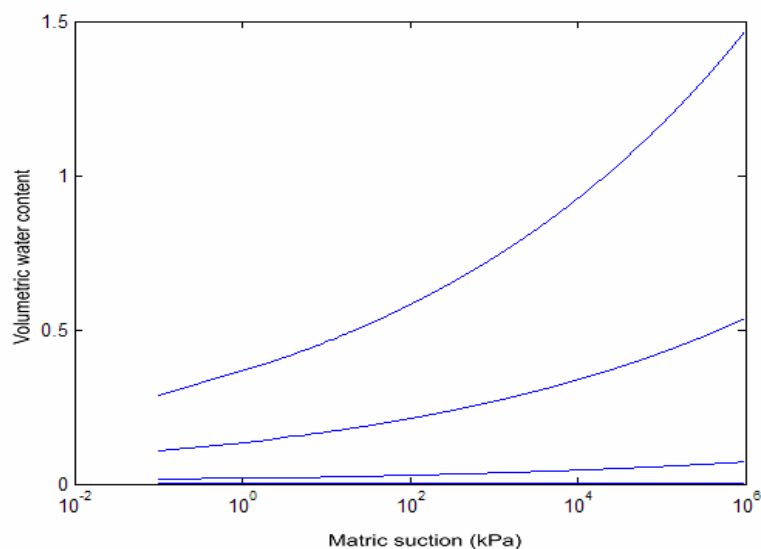
مطابق شکل شماره 3 که ترسیم شده فرمول 1 می باشد مشاهده می شود که با ثابت بودن **a** هر چه **b** بیشتر شود ابتدای منحنی به بالا حرکت کرده و بهترین نقطه  $b=1/0$  می باشد چون درصد حجمی 1 را به دست می دهد پس با ثابت بودن **b** و با تغییرات **a** مطابق 2 می توان منحنی های مختلفی بدست آورد که هر چه **a** بیشتر می شود شیب هم بیشتر می شود.

فرمول Williams (1983) :

$$\ln \psi = a + b \ln \theta \quad (2)$$

$$\theta = e^{\frac{\ln \psi - a}{b}}$$

فرمول ویلیامز که مربوط به مطالعه بر روی خاکهای استرالیا می باشد مطابق شکل 4 که رسم شده فرمول ویلیامز می باشد مشاهده می شود که این تغییرات منحنی برعکس تمام منحنی های مورد بررسی می باشد و به صورت معکوس است و هیچ گاه نمی تواند تغییرات منحنی مشخصه دقیقی را نمایش دهد اما این فرمول اساس فرمول بولتزمن که یک سال بعد بدست آورد می باشد و فقط  $\ln$  صورت را کسر و تغییرات آن بسیار به واقعیت نزدیک شد.

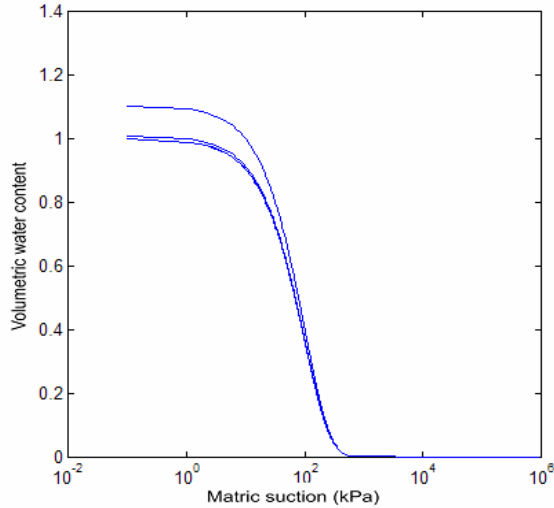


شکل 4- منحنی Williams برای **b=10** ثابت و **a=10,20,30**

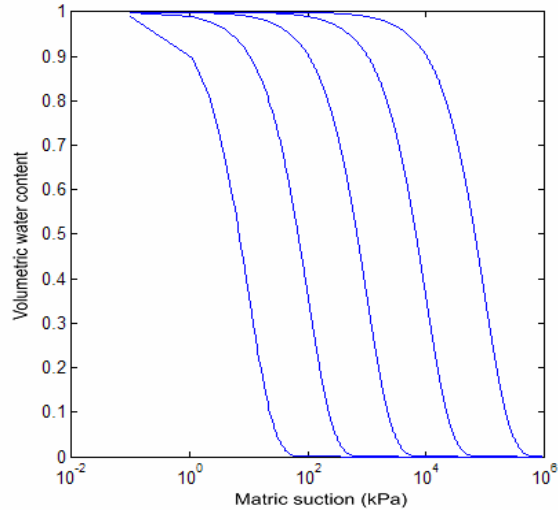
فرمول Boltzman (1984) :

$$\theta = e^{-(\psi - a \gamma) / b \gamma} \quad (3)$$

معادله 2 و 1 برای حالت بعد از (AEV) است و بالا و پایین منحنی معتبر نیست و چون در قسمت های دیگر جوابگو نبود، معادلات دیگر پیشنهاد شد. مشاهده می شود که در نمودارهای 5 و 6 که در مورد فرمول بولتزمن با  $a$  و  $b$  های متغیر می باشد باید به نکات زیر توجه نمود.



شکل 6- منحنی بولتزمن برای  $b$  ثابت و  $a$  متغیر



شکل 5- منحنی بولتزمن برای  $a$  ثابت و  $b$  متغیر

1-  $a$  در فرمول بولتزمن باید کوچکتر از 1 باشد تا همواره درصد رطوبت حجمی زیر 1 شود.

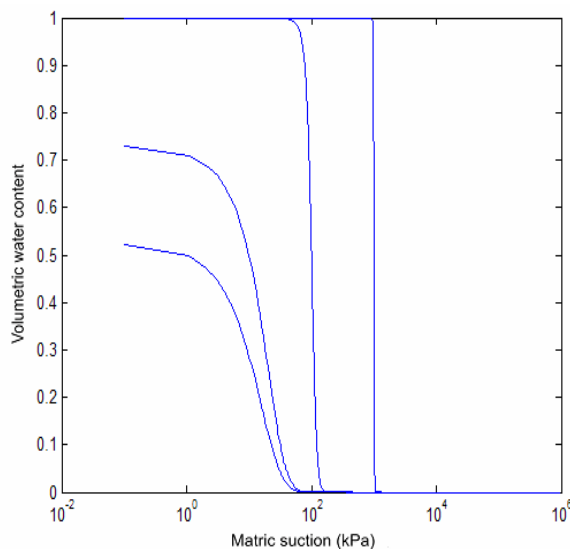
2- با ثابت بودن  $a$  ،  $b$  به AEV وابسته است.

3- با ثابت بودن  $b$  ،  $a$  به درصد رطوبت حجمی وابسته است.

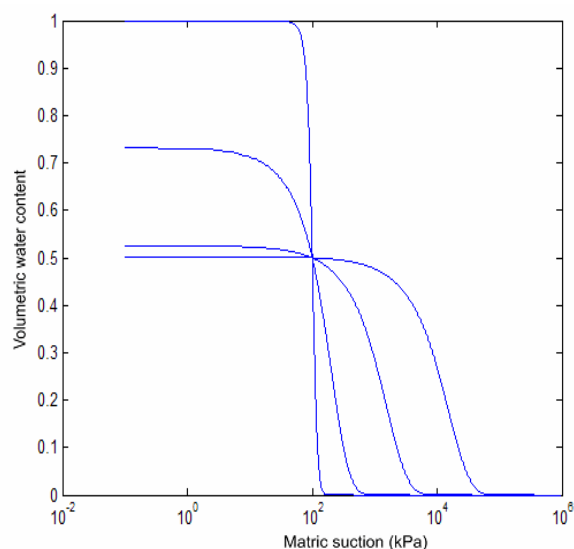
3-4 فرمول mckee و Bumb (1987):

$$\theta = \left[ \frac{1}{1 + e^{(\psi - a \gamma) b \gamma}} \right] \quad (4)$$

مشاهده می شود که در نمودارهای 7 و 8 که در مورد فرمول Bumb با  $a$  و  $b$  های متغیر می باشد باید به نکات زیر توجه کرد.



شکل 8- منحنی bamb برای  $b$  ثابت و  $a$  متغیر

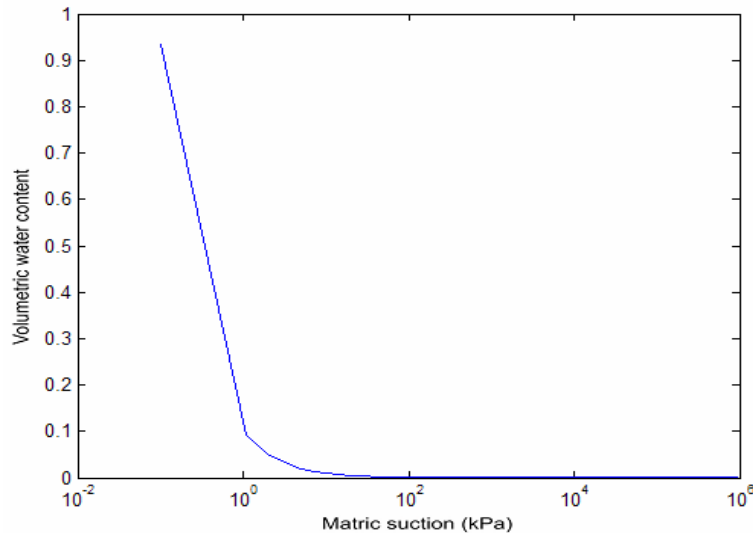


شکل 7- منحنی bamb برای  $a$  ثابت و  $b$  متغیر

- 1- دقت این فرمول به اندازه فرمول بولتزمن نیست.
- 2- برای حالت AEV مناسب نمی باشد.
- 3- در نمودار 8 هر چه a بیشتر شود نمودار به خط عمودی نزدیکتر شده که از عیبهای این فرمول است.
- 4- در نمودار 7 هر چه b بیشتر شود نمودار به AEV وابسته است اما منحنی در قسمت قبل از AEV در شرایط اشباع صدق نمی کند.

فرمول Van Genuchten (1980) :

$$\theta = \left[ \frac{\theta_s}{(1 + (p\psi)^n)^m} \right] \quad (5)$$



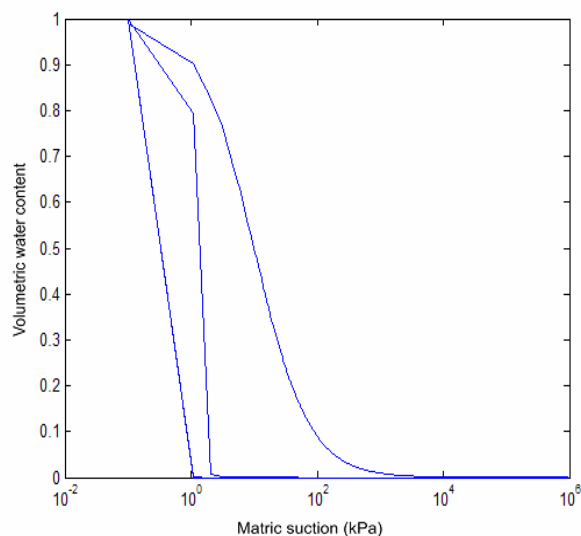
شکل 9- منحنی van

در این نمودار که توسط van پیشنهاد شد تغییرات اولیه منحنی بصورت خطی میباشد که اگر فرمول fredlund را کاملترین فرمول بگیریم این قسمت چون خطی است از واقعیت کمی دور می باشد و تنها حسن این فرمول تاثیر دادن 3 متغیر m و n و a که بعدها از همین حالت و این فرم برای فرمول fredlund استفاده شد.

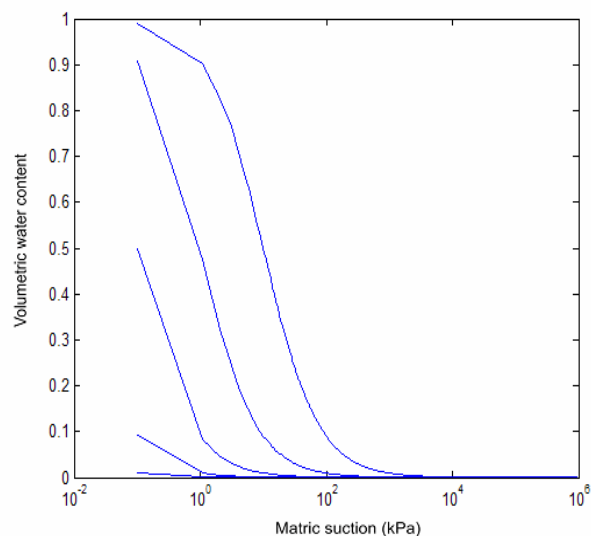
3-7 gardner (1958) :

$$\theta = \left[ \frac{1}{1 + q\psi^n} \right] \quad (6)$$

n شیب در نقطه عطف و q وابسته به A.EV می باشد.  
 مطابق نمودارهای 10 و 11 مشاهده می شود که با ثابت بودن a هر چه مقدار b بیشتر شود نمودار به پایین حرکت کرده و درصد رطوبت اولیه کمتر می گردد که بیان گر دقیق منحنی مشخصه آب و خاک نمی باشد و قسمت اولیه منحنی را درست نمایش نمی دهد و با ثابت بودن b و با افزایش a مشاهده می شود که تغییرات نمودار با نظم خاصی صورت نمی گیرد و شیب منحنی به بی نهایت نزدیک می شود و این تغییرات اصلاً جوابگوی منحنی مشخصه آب و خاک نمی باشد.



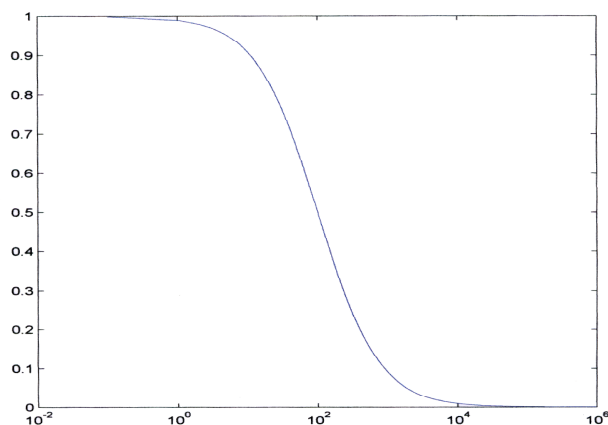
شکل 11- منحنی gardner برای ثابت  $a$  و متغیر  $b$



شکل 10- منحنی gardner برای ثابت  $b$  و متغیر  $a$

فرمول Brutsaert (1966):

$$\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^n} \quad (7)$$



شکل 12- منحنی brutsaert

این فرمول که در سال 1966 پیشنهاد شد بهترین فرمول و کمترین خطا را می دهد و دارای 2 متغیر  $a$  و  $n$  میباشد و  $n$  به AEV وابسته است.

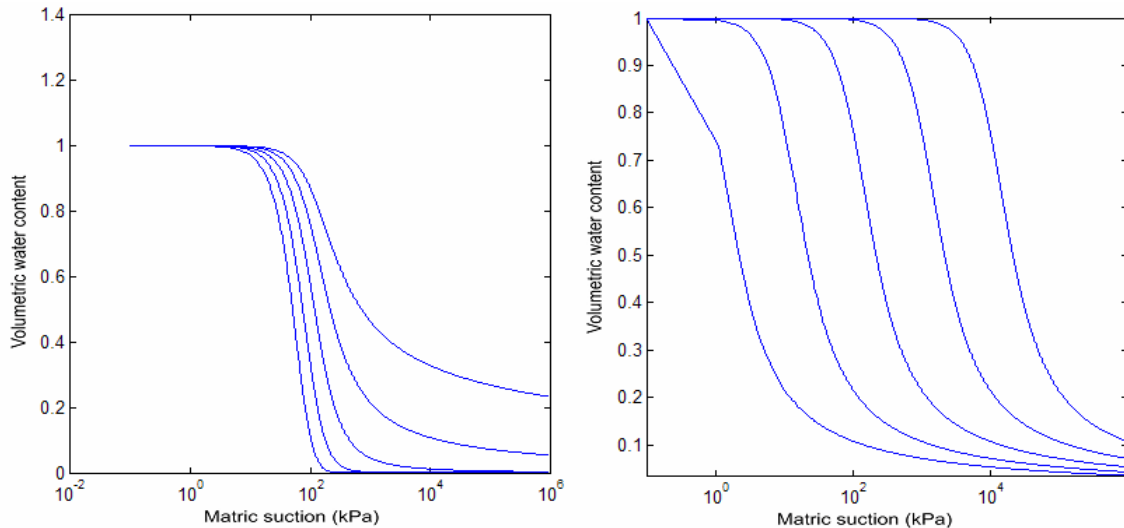
فرمول fredlund :

$$\theta = \theta_s \left( \frac{1}{\ln \left[ e + (\psi / a)^n \right]} \right)^m \quad (8)$$

- 1- در منحنی 13 و 14 و 15 تغییرات  $a$  و  $m$  و  $n$  مورد توجه قرار گرفته است.
- 2- در نمودار 13 مشاهده می شود که با ثابت بودن  $n$  و  $m$  ، AEV ،  $a$  وابسته است و هر چه  $a$  بیشتر باشد AEV به جلو حرکت میکند و مقدار RWC ثابت می ماند پس RWC به  $a$  وابسته نمی باشد.

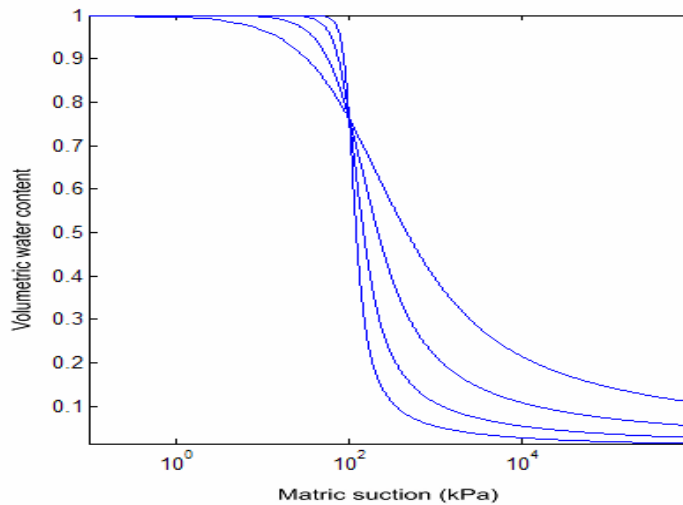
3- در نمودار 14 مشاهده می شود که با ثابت بودن  $a$  و  $n$  با زیاد شدن  $m$  منحنی به خط عمود نزدیک شده و هر چه  $m$  کمتر باشد شیب منحنی کمتر می شود و هر چه  $m$  زیادتر شود شیب منحنی بیشتر شده و RWC درصد رطوبت پسامد به صفر نزدیکتر می شود و همچنین تغییرات AEV با تغییرات  $m$  بسیار ناچیز می باشد.

4- در نمودار 15 مشاهده می شود که برای ثابت ماندن  $a$  و  $m$  و تغییر  $n$  نمودار در یک نقطه دارای عطف می باشد و هر چه  $n$  کمتر شود RWC به صفر نزدیکتر شده و شیب منحنی بیشتر میشود و همچنین تغییرات AEV با زیاد شدن  $n$  بیشتر شده و به سمت جلو حرکت میکند.



شکل 14- منحنی Fredlund برای  $a, n$  ثابت و  $m$  متغیر

شکل 13- منحنی Fredlund برای  $m, n$  ثابت و  $a$  متغیر



شکل 15- منحنی Fredlund برای  $a, m$  ثابت و  $n$  متغیر

### مبانی تئوری در منحنی مشخصه آب و خاک :

منحنی مشخص برای هر نوع خاک متفاوت می باشد حتی برای یک خاک با نسبتهای تخلخل مختلف منحنی مشخصه متفاوت است. برای بیان فرمول نیاز به یک تابع  $f(r)$  می باشد که اگر خاک را به صورت یک محیط 3 فازه در نظر بگیریم شامل ذرات خاک و هوا و آب می باشد که فضای خالی و خلل و فرجها را اگر با یک رابطه نشان دهیم آنگاه داریم:

$$\theta(R) = \int f(r) dr$$

که  $f(r)$  چگالی خلل و فرجها است که مجموع تمام خلل و فرجها در یک خاک می باشد  $\theta(R)$  مقدار رطوبت مربوط به اندازه گیری حجم می باشد که برابر مجموع تمام رطوبت های خلل و فرجها می باشد. همچنین طبق قانون مؤبستگی یک رابطه معکوس بین Suction,  $r$  وجود دارد که داریم .

$$r = \frac{c}{\psi} \quad (10)$$

جایی که خلل و فرج ها پر از آب باشد =  $R_{\max}$  و جایی که خلل و فرج ها پر از هوا باشد =  $R_{\min}$  و جایی که خلل و فرج ها هم هوا و هم آب وجود دارد =  $R$

$$\psi_{\max} = \frac{C}{R_{\min}}$$

$$\psi_{\text{aev}} = \frac{C}{R_{\max}}$$

$$\theta(\psi) = \int_{\psi_{\max}}^{\psi} f(r) dr = \int_{\psi_{\max}}^{\psi} f\left(\frac{c}{h}\right) d\left(\frac{c}{h}\right) = \int_{\psi}^{\psi_{\max}} f\left(\frac{c}{h}\right) \frac{c}{h^2} dh$$

اولین فرض را برای بیان اولین فرمول را بصورت  $f(r)$  مساوی مقدار ثابت می گیریم

$$f(r) = \text{مقدار ثابت} = A$$

$$\theta(\psi) = \int_{\psi}^{\psi_{\max}} \frac{Ac}{h^2} = Ac \left( \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\psi_{\max}} \right) = \left\{ \begin{array}{l} Ac = B \\ D = \frac{Ac}{\psi_{\max}} \end{array} \right\} = \frac{B}{\psi} - D$$

این فرمول اولین بار توسط Gardner (1956) پیشنهاد شد. دومین فرض را برای بیان دومین فرمول را بصورت زیر می گیریم.

$$f(r) = \frac{A}{r^2} \quad \text{و} \quad f(h) = \frac{Ah^2}{c^2}$$

$$\theta(\psi) = \int_{\psi}^{\psi_{\max}} \frac{Ah^2}{c^2} \frac{c}{h^2} dh = \left\{ \begin{array}{l} D = A/c \text{ مقدار ثابت} \\ B = A\psi_{\max}/c = \text{مقدار ثابت} \end{array} \right\} = B - D\psi$$

این فرمول هم توسط Xing, fredlund (1994) پیشنهاد شد. سومین فرض را برای بیان سومین فرمول را بصورت زیر می گیریم.

$$f(r) = \frac{A}{r^{m+1}} \quad \text{و} \quad f(h) = \frac{Ah^{m+1}}{c^{m+1}}$$

$$\theta(\psi) = \int_{\psi}^{\psi_{\max}} \frac{Ah^{m+1}}{c^{m+1}} \frac{c}{h^2} dh = \left\{ \begin{array}{l} D = \frac{A}{mc^m} \\ B = \frac{A\psi_{\max}^m}{mc^m} \end{array} \right\} = B - D\psi^m$$

این فرمول هم اولین بار توسط Brooks and corey 1964 ارائه شد. چهارمین فرض را برای بیان چهارمین فرمول را بصورت زیر می گیریم. فرمولها بالا فقط در محدود  $R_{\min}$  تا  $R$  عمل می کند و دو قسمت ابتدایی و انتهای نمودار را در بر نمی گیرد پس داریم

$$\theta(\psi) = \theta_s \int_{\psi}^{\infty} f(h) dh$$

Van Genuchten (1980)  $f(\psi)$  را به صورت زیر پیشنهاد نمود که داریم

$$f(\psi) = \frac{mnp (p\psi)^{n-1}}{[1 + (p\psi)^n]^{m+1}}$$

$$\theta(\psi) = \theta = \int_{\psi}^{\infty} f(h)dh \rightarrow \theta(\psi) \approx \frac{\theta_s}{(1 + (p\psi)^n)^m}$$

پنجمین فرض را برای بیان پنجمین فرمول را بصورت زیر می گیریم. xing and fredlund را به صورت زیر پیشنهاد نمودند.

$$f(\psi) = \frac{mn(\psi/a)^{n-1}}{a[e + (\psi/a)^n] \left\{ \text{Lag} \left[ e = (\psi/a)^n \right] \right\}^{m+1}}$$

که fredlund بجای p در فرمول van قرار دارد  $a = \frac{\psi}{p}$

$$\theta(\psi) = \theta \int_{\psi}^{\infty} f(h)dh \rightarrow \theta(\psi) = \frac{\theta_s}{\left[ \ln \left[ e + (\psi/a)^n \right] \right]^m}$$

نتیجه گیری:

فرمولهای ارائه شده در قسمتهای قبلی که توسط محققین مختلف ارائه شده بسته به نوع خاک مورد مطالعه محققین پیشنهاد شده و ممکن است در یک نوع خاک فرمول Fredlund دقیق تر و در نوع دیگر خاک با مشخصات دیگر فرمول محقق دیگر دقیقتر باشد. پس بهترین راه حل برای بدست آوردن فرمولهای دقیق برای آن خاک مورد مطالعه بررسی چندین فرمول می باشد که این کار توسط یک برنامه ارائه شده است. به عنوان مثال مشخصات خاک مورد مطالعه در دست می باشد و با رسم نقاط داده شده و کشیدن چندین نمودار و تغییر دادن متغیرهای فرمول بهترین نمودار فیکس شده را بدست می آوریم. و از بین این فرمولها بهترین نمودار که نزدیکترین تغییرات را دارد حاصل می شود. برای این کار ابتدا نقاط خاک مورد مطالعه توسط هر نوع برنامه ای که امکان رسم نمودار را دارد رسم شده و بعد در نرم افزار MATLAB با برنامه های نوشته شده که مربوط به محققین مختلف است با تغییر دادن متغیرها چندین نمودار حاصل و از بین آنها بهترین و نزدیکترین منحنی انتخاب می شود. برنامه های نوشته شده در نرم افزار MATLAB به قرار زیر است:

```
clc
clear
b=100;
a=16;
x=1:1000000;
y=2.74.^(-(x-a)./b);
semilogx(x,y)
axis square
hold on
a=a
```

### فرمول Van

```
clc
clear
m=.001;
n=10;
a=100;
for i=1:4
x=1:1000000;
y=1./((1.+(x.*a).^n).^m);
semilogx(x,y)
axis square
hold on
n=n*2
end
```

### فرمول Fredlund

```
clc
clear
m=1;
n=8;
s=1;
```

```
semilogx(x,y)
axis square
hold on
b=b*10
end
```

### فرمول Brook

```
clc
clear
b=1;
a=.01;
for i=1:4
x=1:1000000;
y=(b./x).^a;
semilogx(x,y)
axis square
hold on
a=a*10
end
```

### فرمول Bumb

```
clc
clear
a=100;
b=1000;
x=1:1000000;
y=1./((1.+(2.74.^((x-a)./b))));
semilogx(x,y)
axis square
hold on
b=b*10
```

### فرمول Boltzman

```
clc
clear
b=1;
a=1;
for i=1:5
x=1:1000000;
y=1./((1+(b.*(x.^a))));
semilogx(x,y)
axis square
hold on
a=a*10
end
```

### فرمول williams

```
clc
clear
b=10;
a=10;
for i=1:5
x=1:1000000;
y=2.74.^((log(x)-a)./b);
semilogx(x,y)
axis square
hold on
a=a*2
end
```

### فرمول Brook

```
clc
clear
b=1;
a=1;
for i=1:4
x=1:1000000;
y=(b./x).^a;
```

```
x=1:1000000;
y=s./(log(2.718+(x./a).^n)).^m;
semilogx(x,y)
x=log(x);
axis square
hold on
m=m*2
end
```

### فرمول Gardner

```
clc
clear
b=.1;
a=1;
for i=1:5
x=1:1000000;
y=1./(1+(b.*(x.^a)));
semilogx(x,y)
axis square
hold on
b=b*10
end
```

### فرمول Fredlund

```
clc
clear
m=1;
n=2;
s=1;
a=1;
x=1:1000000;
y=s./(log(2.718+(x./a).^n)).^m;
semilogx(x,y)
x=log(x);
axis square
axis tight
hold on
a=a*10
```

### فرمول Fredlund

```
clc
clear
m=.5;
n=2;
s=1;
a=100;
for i=1:5
```

```
a=100;
x=1:1000000;
y=s./(log(2.718+(x./a).^n)).^m;
semilogx(x,y)
x=log(x);
axis square
axis tight
hold on
n=n*2
```

### فرمول Fredlund

```
clc
clear
m=.5;
q=1;
a=100;
n=2;
for i=1:4
x=1:1000000;
y=((1./(log(2.817+((x./a).^n))))).^m);
semilogx(x,y)
hold on
m=m*2
hold on
end
```

مراجع:

Brooks, R.H., and Corey, A.T. 1964. Hydraulic properties of porous medium. Colorado State University (Fort Collins), Hydrology Paper, Nr. 3, March.

Bumb, A.C. 1987. Unsteady-state flow of methane and water in coalbeds. Ph.D. thesis, Department of Chemical Engineering, University of Wyoming, Laramie.

Fredlund, D.G. 1964. Comparison of soil suction and one-dimensional consolidation characteristics of a highly plastic clay. M.Sc. thesis, Department of Civil Engineering. University of Alberta, Edmonton, AB, Canada.

Fredlund, D.G., and Rahardjo, H. 1993a. Soil mechanics for unsaturated soils. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Fredlund, D.O., and Rahardjo, H. 1993b. An overview of unsaturated soil behaviour. Proceedings, ASCE Specialty Series on Unsaturated Soil Properties, Dallas, TX., October 24-28, pp. 1-33.

Gardner, W.R. 1958. Some steady state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water-table. Soil Science, 85: 228-232.

Gardner, W.R., Hillel D., and Benyamini, Y. 1970. Post irrigation movement of soil water. I. Redistribution. Water Resources Research, 6: 851-861.

Gardner, W.R., Hillel D., and Benyamini, Y. 1970b. Post irrigation movement of soil water. II. Simultaneous redistribution and evaporation. Water Resources Research, 6: 1148-1153

Mendenhall, W., Scheaffer, R.L., and Wackerly, D.D. 1981. Mathematical statistics with applications. 2nd Edition. Duxbury Press, Boston.

van Genuchten, M.T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal, 44: 892-898.

Williams, P.J. 1982. The surface of the Earth, an introduction to geotechnical science. Longman Inc., New York.

Williams, J., Prebble, R.E., Williams, W.T., and Hignett, C.T. 1983. The influence of texture, structure and clay mineralogy on the soil moisture characteristic. Australian Journal of Soil Research, 21 15-32.