محاسبه بار بحرانی سازه های منظم بدون حرکت جانبی با استفاده از مقادیر ویژه مولدهای ضرب کارتزین مدل گراف سازه

پروفسور علی کاوه، وفا مرسلی

استاد دانشکده عمران دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشجوی کارشناسی ارشد سازه دانشگاه علوم و فنون مازندران

alikaveh@iust.ac.ir
vafa.morsali@yahoo.com

خلاصه

با توجه به اینکه قالب ماتریس سختی بسیاری از سازه ها به گونه ای است که می توان آنرا بصورت ضرب کارتزین ماتریس اتصال دو یا سه گراف نوشت، در نتیجه در این مقاله سازه های منظم که قابل تعریف با این ضرب هستند، انتخاب شده و مدل گراف این سازه ها بوسیله ضرب کارتزین تجزیه شده و از مقادیر ویژه مولدهای این ضرب استفاده کرده و بار بحرانی سازه محاسبه می شود، نتیجه استفاده از این روش کاهش فضا و زمان رایانه ای مورد استفاده در محاسبات بار بحرانی خواهد یود.

کلمات کلیدی: گراف، گراف حاصلضرب، ضرب کارتزین، مقادیر ویژه، بار بحرانی

مقدمه

تئوری گرافها یکی از شاخه های ریاضیات است که در سال ۱۷۳۶ توسط اویلر پایه گذاری شد ، در دنیای اطراف خود وضعیتهای زیادی را می توان بوسیله مجموعه ای از نقاط و اعضا که این نقاط را به هم مرتبط می کنند نشان داد، ساده ترین مثال دراین مورد رابطه دوستی بین انسانها است که آدمها نقاط این مجموعه و رابطه بین آنها اعضای مجموعه را تشکیل می دهند، گرافها در بسیاری از علوم و مهندسی مانند عمران، برق، مکانیک و غیره دارای کاربرد می باشد.

کاربرد گرافها در مباحث مربوط به پایداری و تحلیل دینامیکی سازه ها را می توان در کارهای کاوه و سیاری نژاد [۴]، کاوه و سلیم بهرامی [۵و۶] مشاهده کرد، ضرب گرافها که یکی از مباحث گرافها است در بسیاری از مباحث از جمله مرتب سازی گرهی [۳] ، محاسبه مقدار ویژه دوم و بردار فیدلر [۷] کاربرد دارد، در ابن تحقیق از ضرب کارتزین جهت بدست آوردن مولدهای یک گراف استفاده می شود، همچنین از رابطه بین مقادیر ویژه یک گراف با مقادیر ویژه مولدهای آن استفاده کرده و در نهایت پس از تجزیه گراف اصلی از خواص مولدها جهت محاسبه بار بحرانی سازه های منظم بدون حرکت جانبی استفاده می شود، که نتیجه آن کاهش زمان وافزایش دقت محاسبات رایانه ای می باشد.

تعریف

یک گراف S شامل یک مجموعه N(S) از المان‌ها که گره (رأس یا نقطه) و یک مجموعه M(S) از المان‌ها که اعضاء یا لبه‌ها نامیده می‌شود. هر عضو دارای دو گره است که هر دو گره که عضو را تشکیل می‌دهند، انتهاهای آن عضو نامیده می‌شود. اگر دو گره از یک گراف به وسیله‌ی عضوی به هم وصل شوند، آن دو گره را همسایه گویند و یک عضو با یک گره منطبق است اگر آن گره یک انتها برای آن عضو باشد. دو عضو در صورتی منطبق هستند اگر آن دو عضو حداقل در یک گره‌ی انتهایی با هم مشترک باشند.

درجه یک گره n_i که با $\deg(n_i)$ نوشته می‌شود، برابر است با تعداد اعضایی که به آن گره منطبق است.

یک زیرگراف Si از گراف S، یک گراف است به طوری که :

$M(Si), M(S), N(Si), N(S)$ و هر عضو از آن، انتهاهای مشابه با S دارند.

یک مسیر در گراف S، یک دنباله در گراف S است که هیچ گرهی در آن بیش از یک بار استفاده نشود.

$$N(P) = M(P) + 1$$

یک مسیر با n گره را با P_n نمایش می دهند، یک مسیر بسته را سیکل گویند، به طوری که گره ابتدا و انتهای آن یکی باشد که $N(C) = M(C)$

و همچنین یک سیکل با n گره را با C_n نمایش می دهند .

گراف S را در نظر می‌گیریم اگر گراف S، n گره داشته باشد، ماتریس همسایگی یک ماتریس $n \times n$ است که اگـر n_i یـا n_j همـسایه باشـند، درایه‌ی سطر i و ستون j آن برابر ۱ است. و در غیر این صورت برابر صفر می‌شود این ماتریس را با A(S) نمایش می دهیم [۲،۱].

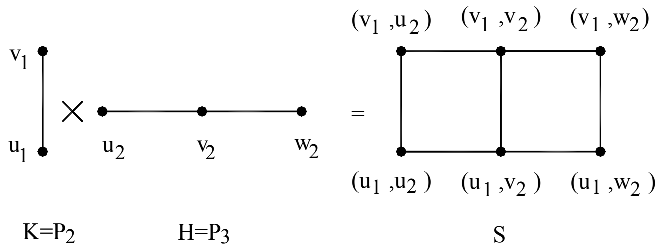
ضرب کارتزین گرافها

با توجه به اینکه مدل بسیاری از سازه ها دارای ساختار منظمی هستند ، می توان آنها را به صورت حاصلضرب تعدادی گراف ساده در نظر گرفت. این زیر گرافها که در تشکیل سازه اصلی مورد استفاده قرار می گیرند ، مولد نام دارند .

ساده ترین نوع ضرب گرافها ضرب کارتزین می باشد . اگر گرافهای K,H به عنوان مولدهای گراف G ،به ترتیب دارای N(H) و N(K) گره و E(H) و E(K) یال باشند ؛ آنگاه ضرب کارتزین آنها به صورت $G = H \times K$ تعریف می شود . این ضرب ، جمع کرونکر نیز نام دارد و خاصیت جابجایی را نیز دارد . گراف حاصل یعنی G ، دارای $N(H) \times N(K)$ گره می باشد، دو گره تمایز $u:(u_1,v_1)$ و $v:(u_2,v_2)$ با هم مجاورند هر گاه :

$$u_1 = u_2 \Rightarrow v_1v_2 \in E(H) \quad or \quad v_1 = v_2 \Rightarrow u_1u_2 \in E(K)$$

در این تعریف u_i یک گره از گراف H و v_j یک گره از گراف K می باشد . به عنوان مثال ضرب کارتزین $K = P_2$ و $H = P_3$ در شکل ۱ نـشان داده شده است[۳].



شکل ۱- ضرب کارتزین $P_2 \times P_3$

ضرب کرونکر

ضرب کرونکر ماتریس مجاورت دو گراف – یا هر دو گراف دلخواه – A و B به صورت $C = A \otimes B$ تعریف می شود .C ماتریسی است که با جایگزینی ماتریس B در محل تک تک درایه های A وضرب درایه های آن در درایـه هـای مـاتریس B حاصـل مـی شـود . بعنـوان مثـال اگـر A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ و B = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد ، آنگاه ضرب کرونکر آنها بصورت زیر است :

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a & b \\ c & d & c & d \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب کرونکر دارای خاصیتی است که از آن در تعیین مقادیر ویژه ضربهای کارتزین ، کارتزین قوی و مستقیم استفاده می شود این خاصیت بصورت زیر معرفی می گردد .

$$(B \otimes C)(D \otimes E) = BD \otimes CE$$

اگر u و v بردارهای با ابعاد مناسب باشند ، داریم :

$$(B \otimes C)(u \otimes v) = Bu \otimes Cv$$

اگر u و v بردارهای ویژه B و C با مقادیر ویژه μ, λ با شند در این صورت :

$$Bu \otimes Cv = \mu\lambda u \otimes v$$

بنابراین نتیجه می گیریم $u \otimes v$ بردار ویژه $B \otimes C$ بوده و $\mu\lambda$ هم مقدار ویژه نظیر آن است [۳] .

فرم ماتریس مجاورت واتصال ضرب کارتزین و مقادیرویژه آن

اگر یک بلوک ماتریس را بصورت زیر در نظر بگیریم :

$$M=\begin{bmatrix} A & B & & & & & & \\ B & C & B & & & & & \\ & B & C & B & & & & \\ & & . & . & . & & & \\ & & & . & . & . & & \\ & & & & B & C & B & \\ & & & & & B & C & B \\ & & & & & & B & A \end{bmatrix}_{mn}$$ که A و B ماتریسهای m×m و M شامل n سطر و n ستون از A,B,C است.

ماتریس M_{mn} که به فرم بالا نمایش داده شده است به صورت معادله زیر نشان داده می شود :

$$M_{mn}=F(A_m,B_m,C_m)_{mn}$$

ماتریس مجاورت ضربهای کارتزین چنین فرمی را دارا است، در این حالت M_{mn} و ماتریسهای A,B به فرم زیر خواهند بود:

$$M_{mn}=F(A_m,B_m,C_m)_{mn} \quad , \quad A_m=F(a,b,c)_m \quad , \quad B_m=F(c,d,c)_m$$

حروف کوچک عدد و حروف بزرگ نشانگر ماتریس هستند .

اگر ماتریسهای زیر را در نظر بگیریم :

$$T_K=F(0,1,0)_K=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & & . & . & . & & & \\ & & & . & . & . & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{K\times K} \quad , I_K=F(1,0,1)_K=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & & . & & & \\ & & & & & . & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{K\times K}$$

در واقع از این ماترسیها و خواص ضرب کرونکر می توان فرم بالارا بصورت حاصل جمع چند ماتریس نوشت . یعنی :

$$M_{mn}=I_n\otimes A_m+T_n\otimes B_m$$

با نوشتن رابطه ای مشابه برای B_m و A_m بصورت زیر داریم :

$$A_m=aI_m+bT_m \quad , \quad B_m=cI_m+dT_m$$

و با جایگذاری در رابطه M_{mn} داریم :

$$M_{mn}=a(I_n\otimes I_m)+b(I_n\otimes T_m)+c(T_n\otimes I_m)+d(T_n\otimes T_m)$$

اکنون با استفاده از خواص ضرب کرونکر که در قسمت قبل معرفی شد مقدار ویژه M_{mn} از رابطه زیر محاسبه خواهد شد :

$$\lambda=a+b\lambda_m+c\lambda_n+d\lambda_m\lambda_n$$

در جدول ۱ ضرایب d,c,b,a برای ضرب کارتزین گرافهای بدون وزن آمده است [۳] که از این ضرایب برای گرافهای وزن دار نیز می توان استفاده کرد.

جدول ۱_ ضریب λ برای ماتریس مجاورت و اتصال گرافها

λ	d	c	b	a	نوع ضرب
$\lambda_m+\lambda_n$	۰,۰	۱	۱	۰,۰	کارتزین

محاسبه بار بحرانی

در این تحقیق سازه های فضاکار منظم مورد بررسی قرار می گیرند . سازه زمانی منظم است که بتوان آنرا بصورت حاصلضرب دو یا سه گراف بیان نمود، بعبارتی قالب ماتریس سختی کل سازه بصورتی باشد که بتوان از ضرب کارتزین به آن رسید ، بر اساس تعریف ، ناپایداری در سازه زمانی به وقوع می پیوندد که تغییر شکل δ ($P = K_t\delta$) به مقدار نا محدودی افزایش یابد، شرط برقراری این مورد اینست که دترمینان K_t برابر با صفر قرار گیرد .

در یک سازه که ستونهای آن تحت بار محوری P قرار دارند ماتریس سختی برابر K_t با عبارت زیر است :

$$K_t = K_{stiffness} - PK_{geometric}$$

برای ناپایدار شدن سازه :

$$|K_t| = \left|K_{stiffness} - PK_{geometric}\right| = 0$$

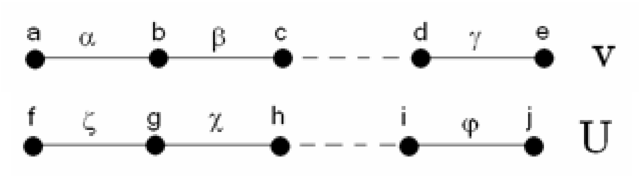
بار متناسب با کمترین مقدار ویژه این معادله مشخصه بار بحرانی نام دارد.

مراحل محاسبه بار بحرانی

در این روش ابتدا بایستی ماتریس سختی کل یعنی K_t را بدست آورد ، سپس یک گراف متناسب با هندسه سازه در نظر می گیریم . بعد به ترتیبی که توضیح داده خواهد شد مولدهای وزندار ، با وزن مجهول در نظر می گیریم ، لازم به ذکر است که گراف وزن دار گرافی است که یالها و رئوس آن دارای وزن می باشد، ماتریس حاصل از گراف حاصلضرب فرضی با وزنهای مجهول را بدست می آوریم سپس از تساوی این ماتریس با ماتریس K_t(ماتریس سختی سازه اصلی) وزنهای مجول محاسبه می شوند، در انتها از خواص این مولدها استفاده کرده و بار بحرانی را محاسبه می کنیم .

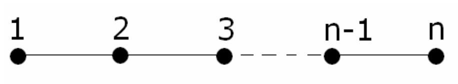
نحوه بدست آوردن مولدهای وزن دار

باتوجه به اینکه می خواهیم از سازه مدل شده به صورت گراف حاصلضرب کارتزین به مولدهای این ضرب برسیم واز روی خواص این مولدها بتوانیم بار بحرانی سازه را تشخیص بدهیم لذا مولدها را به صورت گرافهای وزندار بدست می آوریم که برای این کار به ترتیب زیر عمل می کنیم :
ابتدا برای گرافهای مولد وزنهایی مجهول برای هر راس و یال در نظر می گیریم .اگر برای دو گراف فرضی V,U این کار را انجام بدهیم به شکلی مانند شکل ۲ خواهیم رسید :



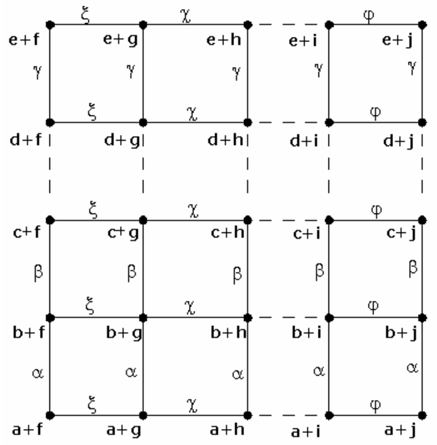
شکل ۲- گرافهای مولد با وزنهای مجهول

در این مورد ماتریس اتصال را برای هر کدام از مولدها به دست می آوریم که برابر است با وزن برای آن راس و برای یالهای مرتبط برابر با وزن یال مربوطه می باشد .
نکته دیگری که لازم به ذکر است، اینست که این ماتریس را برای گره های با شماره های مورد نظر که بترتیبی که در شکل ۳ آمده است در نظر می گیریم:

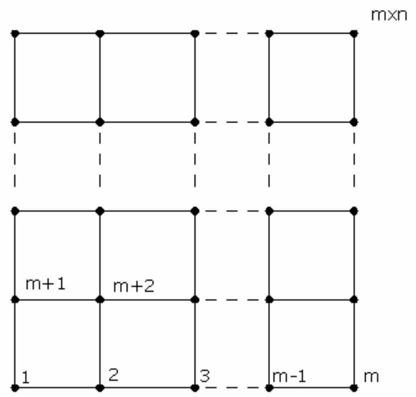


شکل ۳- شماره گذاری گره ها

حال که توانسته ایم ماتریس اتصال مولدها که شامل پارامترهای مجهول است را بدست بیا وریم می توانیم با تعریفی که از ضرب کارتزین داریم ماتریس اتصال گراف حاصلضرب را بدست بیاوریم اگر برای مثال بالا بخواهیم اینکار را انجام بدهیم به شکل ۴ خواهیم رسید .
بایستی تو جه داشت که در محل رئوس وزن راسهای مولدها به هم اضافه شده است . اکنون از روی شکل ۴ می توانیم ماتریس اتصال را به همان ترتیبی که در مورد مولدها عمل کردیم، بدست بیاوریم و نکته ایکه بایستی مد نظر داشت اینست که در مورد ترتیب گره ها لازم است بصورتیکه در شکل ۵ آمده است عمل کنیم :



شکل ۴- گراف حاصلضرب با وزنهای مجهول



شکل ۵- شماره گذاری گره ها برای گراف حاصلضرب

حال از تساوی بین این ماتریس مجهول و ماتریس سختی سازه اصلی می توان پارامترهای مجهول را محاسبه کرد، در نتیجه مولدهای وزن دار با وزنهای معلوم به دست می آیند.

محاسبه بار بحرانی با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس اتصال مولدها

در این روش ابتدا ماتریس اتصال مولدها محاسبه می شود سپس مقادیر ویژه این ماتریسها را بدست می آوریم ، با استفاده از مطالب گفته شده در قسمتهای قبل می توان مقادیر ویژه ماتریس اصلی را با استفاده از مقادیر ویژه این ماتریسها بصورت زیر بدست آورد :

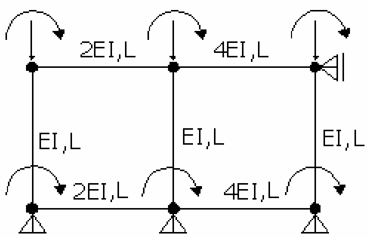
برای ضرب کارتزین مطابق جدول ۱ داریم :

اگر $m=1,2,\ldots$ و λ_m مقادیر ویژه مولد اولی و $n=1,2,\ldots$ و λ_n مقادیر ویژه مولد دوم باشند در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس اصلی :

$$\lambda_m+\lambda_n \;,\; m=1,2,\ldots \quad , n=1,2,\ldots$$

از آنجا که دترمینان یک ماتریس برابر حاصلضرب مقادیر ویژه آن ماتریس است بنابراین زمانیکه دترمینان یک ماتریس برابر صفر باشد ، در نتیجه حداقل یکی از مقادیر ویژه برابر صفر است ، هر یک از مقادیر ویژه که تابعی از λ می باشند را برابر صفر قرار می دهیم، از اینرو بار بحرانی به ازای کمترین مقدار λ بدست می آید .

مثال: مطلوبست محاسبه بار بحرانی قاب شکل ۶.



شکل ۶- مثال

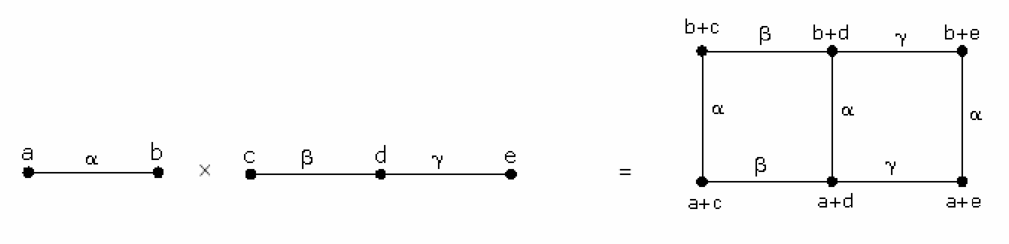
فرض می کنیم که : $\lambda=\dfrac{L^2}{30EI}$

ماتریس سختی کل بصورت زیر بدست می آید :

$$K_s=\begin{bmatrix}12&4&0&2&0&0\\4&28&8&0&2&0\\0&8&20&0&0&2\\2&0&0&12&4&0\\0&2&0&4&28&8\\0&0&2&0&8&20\end{bmatrix}\quad \therefore K_g=\begin{bmatrix}4&0&0&-1&0&0\\0&4&0&0&-1&0\\0&0&4&0&0&-1\\-1&0&0&4&0&0\\0&-1&0&0&4&0\\0&0&-1&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$K_t = K_s - \lambda K_g = \begin{bmatrix} 12-4\lambda & 4 & 0 & 2+\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 28-4\lambda & 8 & 0 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 8 & 20-4\lambda & 0 & 0 & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 0 & 0 & 12-4\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 0 & 4 & 28-4\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8 & 20-4\lambda \end{bmatrix}$$

اکنون اگر یک گراف با وزنهای مجهول متناسب با هندسه سازه و مولدهای مورد نظر مانند شکل ۷ در نظر می گیریم :



شکل ۷- گراف مجهول

ماتریس اتصال گراف حاصلضرب مجهول بصورت زیر بدست می آید :

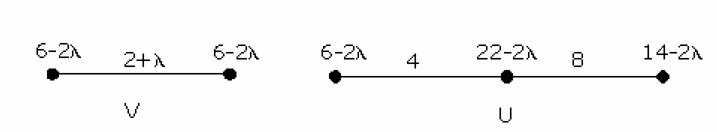
$$K_p = \begin{bmatrix} a+c & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & a+d & \gamma & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & a+e & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & b+c & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta & b+d & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \gamma & b+e \end{bmatrix}$$

بنابراین از برابر هم قرار دادن این ماتریس با ماتریس سختی کل داریم :

بایستی توجه داشت که در مورد وزن رئوس بیشمار جواب داریم پس هر فرضی در مورد مجهولات به شرط ارزای معادلات صحیح است بنابراین تا حد امکان سعی می شود مجهولات گرهی مساوی فرض شود

$$\begin{aligned}
&\alpha = 2+\lambda \quad ,\beta = 4 \quad ,\gamma = 8 \\
&a+c = 12-4\lambda \Rightarrow a = c = 6-2\lambda \\
&a+d = 28-4\lambda \Rightarrow 6-2\lambda+d = 28-4\lambda \rightarrow d = 22-2\lambda \\
&a+e = 20-4\lambda \Rightarrow 6-2\lambda+e = 20-4\lambda \rightarrow e = 14-2\lambda \\
&b+c = 12-4\lambda \Rightarrow b+6-2\lambda = 12-4\lambda \rightarrow b = 6-2\lambda \\
&b+d = 6-2\lambda+22-2\lambda = 28-4\lambda \quad right \\
&b+e = 6-2\lambda+14-2\lambda = 20-4\lambda \quad right
\end{aligned}$$

در نتیجه مولدهای وزن دار مانند شکل ۸ بدست خواهند آمد :



شکل ۸- مولدهای وزندار

از اینرو ماتریسهای اتصال عبارتند از :

$$V = \begin{bmatrix} 6-2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 6-2\lambda \end{bmatrix} ,U = \begin{bmatrix} 6-2\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 22-2\lambda & 8 \\ 0 & 8 & 14-2\lambda \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه مولدها عبارتند از :

$$eig(V) = -3\lambda , -\lambda+8$$
$$eig(U) = -2\lambda+10 , 27.489-2\lambda , 4.51-2\lambda$$

از اینرو مقادیر ویژه کل بصورت زیر خواهد بود :

$$eig(K_P) = -5\lambda + 14, -5\lambda + 31.489, -5\lambda + 8.51, -3\lambda + 18, -3\lambda + 35.489, -3\lambda + 12.51$$

اگر هریک از مقادیر ویژه نهایی بدست آمده را برابر صفر قرار دهیم بار بحرانی به ازای کوچکترین λ بدست می آید:

$$\lambda_{\min} = 1.7022 \Rightarrow \frac{\mathrm{P_{cr}L^2}}{30EI} = 1.702 \rightarrow P_{cr} = \frac{51.06EI}{L^2}$$

از روش مستقیم بار بحرانی برابر است با :

$$P_{cr} = \frac{51.07EI}{L^2}$$

نتایج

روشی که در این مقاله ارائه شد، یک روش سریعترو دقیقتر نسبت به حل مستقیم ماتریس سختی در محاسبه بار بحرانی سازه های فضاکار منظم بدون حرکت جانبی است ، در این روش سازه با با توجه به تعریف ضرب کارتزین به زیر سازه هایی تجزیه شده و در نهایت از خواص این زیر سازه ها به ترتیبی که در متن اشاره شد استفاده کرده و بار بحرانی محاسبه می شود، ارزش این روش زمانیکه ابعاد سازه بزرگ انتخاب شود به خوبی نمایان خواهد بود .

منابع

[1] A. Kaveh, Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods, 2nd Edition, RSP (John Wiley), Taunton, Somerset UK, 1995.
[2] A. Kaveh, Optimal Structural Analysis, RSP (John Wiley), 2nd Edition, UK, 2006.
[3] A. Kaveh. H. Rahami. A new spectral method for nodal ordering of regular space structures, Finite Elements in Analysis and Design, to appear, 2004.
[4] A. Kaveh, MA. Sayarinejad. Eigensoluation for matrices of special patterns. Commun Numer Meth Eng 2003;19:125-36.
[5] A. Kaveh, B. Salimbahrami. Eigensolutions of symmetric frames using graph factorization, Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004;20:889-910.
[6] A. Kaveh, B. Salimbahrami. Buckling load of frames using graph symmetry. In: Proceedings of the 4th on engineering computational technology, Lisbon; 2004.
[7] M. Fiedler, Algebraic connectivity of graphs, Czech. Math. J. 23 (1973) 298-305.