آنالیز دینامیکی سازه ها به کمک تبدیلات موجک

علی کیهانی[۱]، مسعود خالقی[۲]

۱- دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده مهندسی عمران، پست الکترونیکی : a_keyhani@hotmail.com

۲ - دانشگاه صنعتی شاهرود ، دانشکده مهندسی عمران ، پست الکترونیکی : khaleghi.ma@yahoo.com

خلاصه

در این مقاله ضمن معرفی تبدیل موجک،از توانایی این تبدیل در حل معادلات دیفرانسیل استفاده شده ومعادله حرکت سیستم های یک وچند درجه آزادی به کمک این تبدیل حل می شود.در واقع با بسط بالاترین مشتق موجود در معادله حرکت برحسب موجک هار وانتگرالگیری از آن معادله دیفرانسیل به دستگاه معادلات جبری تبدیل می شود که به سادگی حل می شوند.از این روش در حل معادله حرکت سیستم های با رفتار خطی وغیر خطی استفاده می شود

کلمات کلیدی:آنالیز دینامیکی،تبدیل موجک،سیستمهای یک وچند درجه آزادی

مقدمه

تبدیل موجک یک تبدیل ریاضی می باشد که توانایی بالایی در بیان محتوای فرکانسی یک موج همراه با زمان وقوع آنها ،حذف نویز وشناسایی ناپیوستگی ها مانند ترک در سازه دارد.

تبدیل پیوسته موجکی با رابطه زیر تعریف می شود:

$$CWT_x^{\psi}(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int x(t) \Psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \qquad (1)$$

در رابطه فوق $x(t)$ سیگنال اصلی، $\psi(t)$ تابع موجک مادر می باشد و علامت * بیانگرمزدوج مختلط است.

پارامتر τ پارامتر انتقال بوده و به مفهوم به تاخیر انداختن یا تسریع موجک می باشد وپارامترمقیاس s متناظر با کشیدن یا فشردن موج می باشد.

یکی از کاربردهای تبدیلات موجک حل تقریبی معادلات دیفرانسیل می باشد .

به عنوان مثال می توان معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستمهای یک یا چند درجه آزادی را به کمک این تبدیلات حل نمود .

در اینجا به کمک موجک هار معادله مرتبه دوم به ۲ معادله مرتبه اول تبدیل می شود سپس جمله دارای مشتق بر حسب موجک هار بسط داده شده و از آن انتگرال گرفته می شود و بدین ترتیب معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری تبدیل می شود .

پس علی رغم ناپیوسته بودن موجک هاربا بسط بالاترین مشتق موجود توسط سری هار و انتگرالگیری از آن این مشکل بر طرف می شود، این عمل مبنای روشی است که CHM نامیده می شود .

در روش CHM کل بازه زمانی موج در نظر گرفته می شود و در این بازه تعدادی نقاط که نقاط مرتب شده نامیده می شوند، تعریف می شود.

در روش SM بازه انتگرال گیری به تعدادی قطعه تقسیم شده و روش CHM برای هر قطعه جداگانه به کار می رود. با این عمل تعداد نقاط کنار هم قرار گرفته در هر قطعه به طور قابل ملاحظه ای کمتر از روش CHM می شود .

در روش PCA که ساده شده روش SM می باشد در هر قطعه تنها از یک نقطه کنار هم قرار گرفته استفاده می شود. این روش برای معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر بسیار ساده است زیرا برای هر قطعه تنها یک معادله باید حل شود .

خانواده موجک هار برای $t \in [0,1]$ به صورت زیر است:

$$h_n(t) = \begin{cases} 1 & t \in [\frac{k}{2^j}, \frac{k+0/5}{2^j}) \\ -1 & t \in [\frac{k+0/5}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}) \\ 0 & elsewhere \end{cases} \qquad (2)$$

$$n = 2^j + k + 1\,,\ j \ge 0\,,\ 0 \le k \le 2^j - 1\,,\ M = 2^j$$

[۱] استادیار دانشکده عمران

[۲] دانشجوی کارشناسی ارشد عمران

جهت تعیین مجموعه نقاط تابع از رابطه زیر استفاده می کنیم :

$$t_L = \frac{L - 0/5}{2M} \quad (L = 1,2,\dots, 2M) \tag{۳}$$

حال می توان مقدار تابع را در نقاط بدست آمده از رابطه (۳) به کمک رابطه (۲) حساب کرد و پس از تعیین مقادیر توابع هار $h_n(t)$، ماتریس ضـرایب با ابعاد ۲M × ۲M را تشکیل داد.

به عنوان مثال ماتریس ضرایب برای M = ۲ به صورت زیر می باشد .

$$M = 2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} L=1 & t_L = \frac{1}{8} \\ L=2 & t_L = \frac{3}{8} \\ L=3 & t_L = \frac{5}{8} \\ L=4 & t_L = \frac{7}{8} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_1(t) = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1] \\ h_2(t) = [1\ \ 1\ \ -1\ \ -1] \\ h_3(t) = [1\ \ 1\ \ 0\ \ 0] \\ h_4(t) = [0\ \ 0\ \ 1\ \ -1] \end{array} \right. \tag{۴}$$

و ماتریس ضرایب به صورت زیر می باشد :

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{۵}$$

چون در حل معادلات دیفرانسیل به انتگرال گیری احتیاج داریم به همین دلیل روش انتگرال گیری از موجک هار را بیان می کنیم .

بدین منظور ۴ موجک اول هار در نظر گرفته شده و انتگرالهای مربوط به آنها را حساب می کنیم .

$$\int_0^t h_1(t)\,dt = t \qquad 0 \le t < 1 \rightarrow \frac{1}{8}[1\quad 3\quad 5\quad 7] \tag{۶}$$

$$\int_0^t h_2(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} t & 0 \le t < 0/5 \\ 1-t & 0/5 \le t < 1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{8}[1\quad 3\quad 3\quad 1] \tag{۷}$$

$$\int_0^t h_3(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} t & 0 \le t < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - t & \frac{1}{4} \le t < \frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{8}[1\quad 1\quad 0\quad 0] \tag{۸}$$

$$\int_0^t h_4(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} t\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \le t \langle \frac{3}{4} \\ 1-t & \frac{3}{4} \le t \langle 1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{1}{8}[0\quad 0\quad 1\quad 1] \tag{۹}$$

اگر معادلات فوق را با هم ادغام کنیم داریم :

$$\int_0^t H_4(t) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

حال انتگرال موجک ها را با سری هار بسط می دهیم :

$$\int_0^t H_4(t)\,dt = P_4 H_4(t) \tag{۱۱}$$

از مساوی قرار دادن رابطه۱۰ومعادله ۱۱ داریم :

$$P_4 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

با تکرارعمل فوق برای ۸ موجک اول هار داریم :

$$P_8 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 16P_4 & -H_4 \\ H_4^{-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

و به طور کلی برای سیستم درجه m ام :

$$P_m = \begin{bmatrix} P_{0/5m} & \frac{-1}{2m} H_{0/5m} \\ \frac{1}{2m} H_{0/5m}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل دینامیکی به صورت زیر می باشد .

$$\frac{d^2u}{dt^2} = F(t, u, \frac{du}{dt}) \quad t \in [o, T] \qquad (۱۵)$$

که به صورت زیر در نظر گرفته می شود .

$$\frac{du}{dt} = V, \frac{dv}{dt} = F(t, u, v) \qquad (۱۶)$$

با تقسیم بازه زمانی به N قسمت و با در نظر گرفتن طول قسمت n ام به اندازه d_n داریم :

$$t_{n+1} = t_n + d_n \qquad n = 1, 2, ..., \quad N \qquad (۱۷)$$

متغیر محلی زمان برای استفاده از تبدیل موجکی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\tau = \frac{t - t_{(n)}}{d_{(n)}} \qquad (۱۸)$$

که در آن t_n زمان در ابتدای بازه n ام، d_n طول بازه n ام ،tزمان کلی سیستم از شروع حرکت و τ زمان محلی در بازه n ام می باشد..

معادله (۱۶) در زمان محلی به صورت زیر در می آید (نقطه نشان دهنده مشتق نسبت به τ می باشد) :

$$u^0 = d_{(n)}V \quad , \quad V^0 = d_{(n)}F(t_{(n)} + d_{(n)}\tau, u, V) \qquad (۱۹)$$

متغیرهای V , u را به صورت بردارهای سطری با مولفه های $u_j = u(\tau_j), V_j = V(\tau_j)$ که j = ۱،۲،...،۲M می باشد در نظر می گیریم .

برای حل معادلات مرتبه اول بالا ابتدا جمله دارای مشتق را بر حسب سری هار بسط داده و سپس از آن انتگرال گرفته می شود تـا حـل معادلـه بدسـت آید .

$$u^0 = aH(t) \rightarrow$$

$$u = \int_0^t u^0(\tau)d\tau + u_0 = \int_0^t aH(\tau)d\tau + u_0 = a\ PH(t) + u_0 \qquad (۲۰)$$

$$V^0 = bH(t) \rightarrow$$

$$V = \int_0^t V^0(\tau)d\tau + V_0 = \int_0^t bH(\tau)d\tau + V_0 = b\ PH(t) + V_0 \qquad (۲۱)$$

$$u_{n+1} = a(PH)_{\tau=1} + u_n, V_{n+1} = b(PH)_{\tau=1} + V_n \qquad (۲۲)$$

$$u_{n+1} = a_1 + u_n \quad , \quad V_{n+1} = b_1 + V_n \qquad (V) \qquad (۲۳)$$

با توجه به روابط بالا می توان یک رابطه کلی برای محاسبه V_{n+1}, U_{n+1} بر حسب u_nوVn نوشت:

$$u_{n+1} = a(PH)_{\tau=1} + u_n, V_{n+1} = b(PH)_{\tau=1} + V_n \qquad (۲۴)$$

$$u_{n+1} = a_1 + u_n \quad , \quad V_{n+1} = b_1 + V_n \qquad (۲۵)$$

که در روابط بالا a۱ , b۱ اولین مولفه های بردارهای a , b هستند .

در روش CHM, N =۱, d(n) = T فرض می شود و در روش PCA یک نقطه کنار هم قرار گرفته در نظر گرفته می شود و ۱= ۲M می باشد .
در مناطقی که تغییرات ناگهانی رخ می دهد می توان از روش SM استفاده کرد ولی در مناطق هموار روشهای CHM یا PCA دقت کافی دارند .
اکنون به بررسی حل معادله حرکت سیستم های یک درجه آزادی و چند درجه آزادی می پردازیم .

سیستم یک درجه آزادی با رفتار خطی

معادله دیفرانسیل حرکت یک درجه آزادی به صورت زیر می باشد .

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+C\frac{du}{dt}+ku = Pf\,(t) \qquad (۲۶)$$

که در آن m جرم سازه ، C میرایی سازه ، k سختی و P ضریبی ثابت می باشد .
برای حل ، معادله فوق را به صورت زیر در نظر می گیریم .

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{P}{m}f\,(t)-\frac{c}{m}\frac{du}{dt}-\frac{k}{m}u \qquad (۲۷)$$

با عملیاتی مشابه قسمت قبل داریم :

$$u^0 = d_n V \qquad (۲۸)$$

$$V^0 = d_n\left(\frac{P}{m}f\,(t)-\frac{C}{m}\frac{du}{dt}-\frac{k}{m}u\right) \qquad (۲۹)$$

با انتخاب روش PCA داریم :

$$N = 1, M = \frac{1}{2} \qquad (۳۰)$$

با جایگزینی معادلات بالا در معادلات (۲۲) و سپس حل معادلات داریم

$$u_{n+1}=\frac{0/5\,pd_n^2 f(t_{n+1})-0/25\,kd_n^2u_n+md_nV_n+mu_n+0/5cd_nu_n}{0/25kd_n^2+m+0/5cd_n} \qquad (۳۱)$$

$$V_n+1=\frac{pd_nf(t_{n+1})-0/5Cd_nV_n-kd_nU_n-0/25kd_n^2V_n+mV_n}{0/25kd_n^2+m+0/5cd_n} \qquad (۳۲)$$

سیستم های یک درجه آزادی با رفتار غیر خطی

معادله دیفرانسیل حرکت مانند قسمت قبل می باشد اما خصوصیات سازه نظیر جرم و میرایی همراه با تغییر شکل و تغییر شتاب سازه تغییر می کند ، یعنی در حالت کلی میرایی تابعی از سرعت و سختی تابعی از تغییر مکان می باشد ، البته جرم نیز می تواند متغیر باشد
بنابراین در طول مدت تحلیل دینامیکی بایدمرتباً از مشخصات جدید سازه برای حل معادله دیفرانسیل حرکت استفاده کرد،بدین صورت که خصوصیات سازه در طول یک گام زمانی ثابت فرض می شوند وغیر خطی بودن سازه با تغییر خصوصیات آن در ابتدای هر گام زمانی اعمال می شود
بعد از انتخاب گامهای زمانی d n ، سختی و میرایی در گام n ام از آخرین اطلاعات موجود در مورد تغییر مکان و سرعت محاسبه شده و در قسمت بعد اعمال می شود .
روابط مربوط به u_{n+1} و V_{n+1} به صورت زیر می باشند می باشد :

$$u_{n+1}=\frac{0/5\,pd_n^2 f(t_{n+1})-0/25\,kd_n^2u_n+md_nV_n+mu_n+0/5cd_nu_n}{0/25kd_n^2+m+0/5cd_n} \qquad (۳۳)$$

$$V_n+1=\frac{pd_nf(t_{n+1})-0/5Cd_nV_n-kd_nU_n-0/25kd_n^2V_n+mV_n}{0/25kd_n^2+m+0/5cd_n} \qquad (۳۴)$$

درهر گام شتاب را از رابطه زیر حساب می کنیم :

$$u^{00}_{n+1}=\frac{1}{m}\{pf\,(t_{n+1})-c_nV_{n+1}-k_nu_{n+1}\} \qquad (۳۵)$$

سیستم های چند درجه آزادی با رفتار خطی

در سیستم های چند درجه آزادی معادله حرکتی به صورت زیر می باشد:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{f(t)\} \qquad (۳۶)$$

که از آن نتیجه می شود

$$\{\ddot{u}\}=[m]^{-1}\{\{f(t)\}-[c]\{\dot{u}\}-[k]\{u\}\} \qquad (۳۷)$$

مشابه حالت یک درجه آزادی داریم :

$$\{\ddot{u}\}=d_n\{V\} \qquad (۳۸)$$

$$\{\dot{V}\}=d_n[m]^{-1}(\{f(t)\}-\{c\}\{\dot{u}\}-[k]\{u\}) \qquad (۳۹)$$

به کمک روش PCA و پس از محاسبه a_n و b_n و نهایتاً جایگذاری a_n و b_n و اعمال شرایط مرزی $U_0=0$ و $V_0=0$ معادلات زیـر را برای سرعت و جابه جایی حاصل می شود

$$\{u_{n+1}\}=\frac{0/5d_n^2\{f(t_{n+1})\}-0/25[k]d_n^2\{u_n\}+[m]d_n\{V_n\}+[m]\{u_n\}+0/5[c]d_n\{u_n\}}{0/25[k]d_n^2+[m]+0/5[c]d_n} \qquad (۴۰)$$

$$\{V_{n+1}\}=\frac{d_n\{f(t_{n+1})\}-0/5[c]d_n\{V_n\}-[k]d_n\{u_n\}-0/25[k]d_n^2\{V_n\}+[m]\{V_n\}}{0/25[k]d_n^2+[m]+0/5[c]d_n} \qquad (۴۱)$$

سیستم های چند درجه آزادی با رفتار غیر خطی

مشابه سیستم های یک درجه آزادی غیر خطی ماتریس های سختی و میرایی محاسبه شده در حرکت ثابت فـرض مـی شـود و $\{U_{n+1}\}$ ، $\{V_{n+1}\}$ از روابطی مشابه حالت قبل حاصل می شود .

در پایان هر گام شتاب از رابطه زیر محاسبه می شود

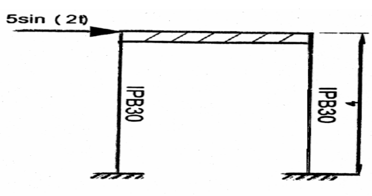
$$\{\ddot{U}_{n+1}\}=[m]^{-1}\{\{f(t_{n+1})\}-[c_n]\{V_{n+1}\}+[k]\{u_{n+1}\}\} \qquad (۴۲)$$

در تحلیل دینامیکی غیر خطی ابتدا گام زمانی d n تعیین می شود ، در هر مرحله با توجه به آخرین اطلاعات مرحلـه قبلـی مـاتریس سـختی و میرایـی محاسبه شده و بردار تغییر شکل و سرعت گره های سازه از روابط مربوط حساب می شود . سپس بردار شتاب محاسبه و عملیات فوق تکرار می شوند .

به عنوان کاربردی از بحث های قبلی یک قاب در آزادی در دو حالت خطی و غیر خطـی در نظـر گرفتـه شـده و روش مـوجکی در بدسـت آوردن پاسـخ دینامیکی سازه مورد استفاده قرار می گیرد .

الف) حالت خطی

قاب زیر با رفتار خطی و تحت بارسینوسی نشان داده شده قرار گرفته است سـتون هـای قـاب IPB۳۰ بـا سـختی I =۲۵۱۷۰ cm۴ و ارتفـاع ۴ متـر می باشد نیروی وارد بر قاب به صورت (۲ t)sin ۵ بر حسب ton f می باشد . میرایی برابر $\xi=0/05$ و جرم سازه ۵۰۰۰ kg در نظر گرفتـه شـده است .



شکل ۱

جواب دقیق سیستم از رابطه زیر محاسبه می شود :

$$U(t)=\frac{p_0}{2k\xi}\left[e^{-\xi wt}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin w_Dt+\cos w_Dt\right)-\cos wt\right] \qquad (۴۳)$$

می باشد که در آن :

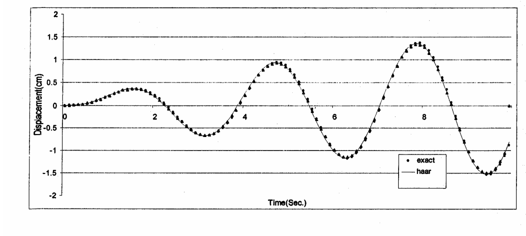
$$k = 2\frac{12\ EI}{L^3} = 10/83\ ton\ f/cm \quad (۴۴)$$

$$w = \sqrt{\frac{l}{m}} = 1/991\ rad/s \quad (۴۵)$$

$$w_D = w\sqrt{1-\xi^2} = 1/99\ rad/s$$

$$p_0 = 5\ ton\ f \quad (۴۶)$$

مقایسه بین پاسخ دقیق (رابطه فوق) پاسخ حاصل از روش موجکی در نمودار زیر انجام شده است



شکل ۲- مقایسه نتایج روش دقیق وروش موجکی

ب) حالت های غیر خطی

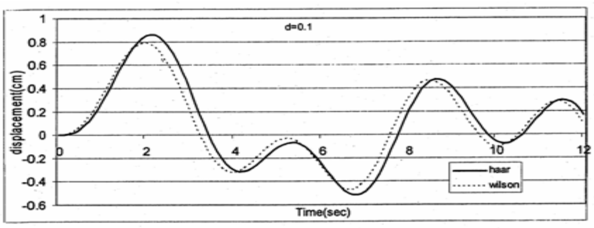
مثال قبل را با در نظر گرفتن رفتار غیر خطی مجدداً بررسی می کنیم .

فرض می کنیم جرم و میرایی ثابت و سختی سازه طبق رابطه $k = \frac{4000}{\sqrt{|u|+1}}$ متغیر باشد ضریب میرایی برابر یک فرض می شود .

در این مثال روش هار با روش ویلسون $-\theta$ مقایسه شده است .

لازم به ذکر است که در روش ویلسون $-\theta$ تغییرات شتاب در فاصله زمانی t تا $t+\theta\Delta t$ خطی فرض می شود و مقدار θ طوری تعیین می شود که دقت و پایداری جواب بهینه شود که در این مسئله $\theta = 1/4$ فرض می شود .

در شکل زیر به ازاء Δt برابر ۰/۱ s ثانیه نمودار های مربوط به روش هاروویلسون $-\theta$ رسم وبا یکدیگر مقایسه شده اند



شکل۳- مقایسه روش موجکی وو یلسون θ

مشاهده می شود هر چه بازه های زمانی کوچکتر باشند دو نمودار بر هم منطبق تر می شوند .

نتیجه گیری

در این مقاله به کمک تبدیل موجکی وبه کمک موجک هار معادله دیفرانسیل سیستمهای یک وچند درجه آزادی،با رفتار خطی وغیر خطی حل شد .درواقع با بسط بالاترین مشتق برحسب موجک هار حل یک معادله دیفرانسیل به حل یک دستگاه معادله جبری تبدیل شد که حل ان بسیار راحت تر می باشد.سپس در مثالی این روش با روشهای متداول مقایسه شد ومشاهده شد که این روش از دقت مناسبی برخوردار است

مراجع

[۱] C.SIDNEY BURRUS,RAMESH A.GOPINATH AND HAITAO GAO(۱۹۹۸) INTRODUCTION TO WAVELET AND WAVELET TRANSFORM.PRENTICE HALL

[۲] STEPHANE MALLAT(۱۹۹۸) A WAVELET TOUR OF SIGNAL PROCESSING.ACADEMIC PRESS

[۳] R . POLICAR . THE WAVELET TUTORIAL , @ HTTP://WWW.PUBLIC. IASTATE.EDU/~ RPOLICAR / WAVELETS / . HTML

[۴] SHIE QIAN(۲۰۰۲) INTRODUCTION TO TIME-FREQUENCY AND WAVELET TRANSFORMS . PRENTICE HALL

[۵] *اعظمی محمد."تحلیل دینامیکی غیر خطی توسط موجک هار"،(۱۳۸۶)پایان نامه کارشناسی ارشد عمران،دانشگاه صنعتی شاهرود*

[۶] *خالقی مسعود."تئوری موجکها وکاربردهای آن در مهندسی سازه"،(۱۳۸۷).سمینار کار شناسی ارشد عمران،دانشگاه صنعتی شاهرود*